

Cálculo de primitivas

Benito J. González
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

1. Introducción.

Sea f una función real y definida en un intervalo I de la recta real. Se dice que la función F , definida y derivable en el mismo intervalo, es *una* primitiva, una antiderivada o una integral indefinida de f en I si se verifica que:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

El conjunto de todas las primitivas de f se denomina *integral indefinida* de f , y se denota por

$$\int f(x)dx \quad \text{o} \quad \int f$$

Decimos *una* primitiva y no *la* primitiva porque si F es una primitiva de f también lo es $F + k$ para cualquier constante k . Recíprocamente, si F y G son dos primitivas de f entonces, por el teorema del valor medio de Lagrange, su diferencia es una constante

$$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para cualquier $x \in I$ lo cual implica que $F - G$ es una función constante.

Según este resultado la integral indefinida de f se obtiene sumando constantes a una primitiva arbitraria F , por lo que es usual escribir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde F una primitiva de f y C una constante.

A la función f se le llama integrando.

2. Linealidad

Si F y G son dos funciones derivables en un intervalo I se tiene que

1. $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$
2. $(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x), \quad k \in \mathbb{R}$

para cualquier $x \in I$, por consiguiente se tiene:

Sean f y g dos funciones y sea k un número real. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

3. Integrales inmediatas.

Puesto que el proceso de integración lo podemos interpretar como el proceso inverso a la derivación, conociendo las derivadas de ciertas funciones elementales se puede elaborar una tabla de integrales que se resolverían de forma muy sencilla simplemente dominando la técnica de la derivación.

Esta tabla se suele denominar *tabla de integrales inmediatas*, la cual, dependiendo de los autores puede ser más o menos amplia. Aquí trataremos con la más simple posible.

1. *Tipo potencial.*

Haciendo uso de:

$$f(x) = x^{n+1} \implies f'(x) = (n+1)x^n$$

obtenemos que:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Análogamente, haciendo uso de la regla de la cadena para el caso:

$$g(x) = (h(x))^{n+1} \implies g'(x) = (n+1)(h(x))^n h'(x)$$

obtenemos que:

$$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Ejemplos

$$\int x^{-1/3} dx; \quad \int (2x+1)(x^2+x+1)^{200} dx$$

2. *Tipo logarímico.*

Como sabemos, la derivada de la función logaritmo es $1/x$. De aquí se deduce que:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

Y como antes, usando la regla de la cadena, obtenemos su expresión para la forma compuesta:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

Ejemplos

$$\int \operatorname{tg} x dx; \quad \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$$

3. *Tipo exponencial.*

a) Puesto que la derivada de e^x es ella misma, tenemos que:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Análogamente, para la derivada de la función exponencial compuesta tenemos que:

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

- b) Para el caso en que $f(x) = a^x$, tenemos que $f'(x) = \ln a \, a^x$ por lo que llegamos a que:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Algo similar se obtiene para el caso compuesto:

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

Ejemplos

$$\int x e^{x^2} dx; \quad \int e^{\sin x} \cos x dx$$

4. *Tipo coseno y tipo seno.*

Haciendo uso de la derivada, tanto del seno como del coseno, razonando como en los casos anteriores se tiene sin ningún tipo de dificultad que:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Y para la forma compuesta:

$$\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x)) + C$$

Ejemplos

$$\int \cos nx dx; \quad \int \frac{\cos \ln x}{x} dx$$

5. *Tipo tangente.*

Como todos sabemos:

$$f(x) = \operatorname{tg} x \implies f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Por lo tanto:

$$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

Y puesto que por aplicación directa de la regla de la cadena obtenemos que:

$$h(x) = \operatorname{tg}(f(x)) \implies h'(x) = \sec^2(f(x))f'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

es inmediata que la deducción del tipo tangente compuesto:

$$\int \sec^2(f(x))f'(x) \, dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = \operatorname{tg}(f(x)) + C$$

Ejemplos

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx; \quad \int \sec^4 x \, dx$$

6. *Tipo cotangente.*

Razonando análogamente a como lo hicimos en el caso anterior, usando la derivada de la cotangente, llegamos a:

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

Y para el caso compuesto:

$$\int \operatorname{cosec}^2(f(x))f'(x) \, dx = -\operatorname{ctg} f(x) + C$$

Ejemplos

$$\int \operatorname{cosec}^2(2e^x)e^x \, dx; \quad \int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$$

7. *Tipo arcoseno (=arcocoseno).* Basándonos en la expresión de la derivada de la función arcoseno tenemos que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C$$

Y para la forma compuesta:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsen f(x) + C$$

Ejemplos

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}} dx; \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$$

8. *Tipo arcotangente (=arcocotangente).*

La forma simple y la compuesta se deduce, al igual que todos los casos anteriores de la expresión de la derivada de esta función. Por lo tanto tenemos que:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C$$

Y la forma compuesta será:

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctg (f(x)) + C$$

Nota:

Un caso muy frecuente es encontrarnos con la integral:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

que es un caso particular del tipo arco tangente, pero que no es mala idea recordarla pues se presenta con frecuencia. Su resolución es casi inmediata:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{1/a^2}{1 + (x/a)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1/a}{1 + (x/a)^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$$

Y de la misma manera se concluye que:

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + f^2(x)} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{f(x)}{a}$$

Ejemplos

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx; \quad \int \frac{1}{x^2-x+1} dx$$

4. integración por partes.

El método de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto de funciones. A partir de esta regla trataremos de buscar un método eficaz para resolver integrales de productos de funciones.

Sea u y v dos funciones derivables. La derivada del producto uv viene dada por la fórmula:

$$d(uv) = u \, dv + v \, du$$

si integramos en ambos miembros se obtiene:

$$uv = \int u \, dv + \int v \, du$$

y despejando $\int u \, dv$ se obtiene:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

A la hora de aplicar la fórmula tenemos que elegir quién será u y quién será dv . Para ello se suele escoger como u aquella función fácil de derivar y como dv la expresión fácil de integrar.

Ante la duda de elección, elegir una acertadamente requiere algo de práctica que se adquiere con los ejercicios. De todos modos, si al hacer una elección llegamos a una integral más difícil que la de partida se recomienda tomar otro camino.

A veces conviene aplicar dos veces la integración por partes. Puede darse el caso que obtengamos una integral similar a la de partida, para lo cual bastará despejar la integral y estará resuelto el problema.

Ejemplos

$$\int x \cos x \, dx; \quad \int x^2 \sin x \, dx$$

El método de integración por partes es útil en cualquier caso en el que, una vez aplicado, la nueva integral a calcular sea más sencilla que la de partida.

Existen ciertos tipos de integrales indefinidas en los que el método de integración por partes está especialmente indicado:

1. producto de un polinomio por una función trigonométrica tipo $\sin ax$, $\cos ax$. *Ejemplo*

$$\int (x^2 + 3) \cos 4x \, dx$$

2. producto de un polinomio por una función exponencial tipo e^{ax} , a^{bx} .

Ejemplo

$$\int (2x + 4)e^{-4x} \, dx$$

3. cuando intervienen las funciones arco seno y arco tangente.

Ejemplo

$$\int x \arctan x \, dx$$

4. productos de polinomios por funciones logarítmicas.

Ejemplo

$$\int (1 - x) \ln x \, dx$$

5. Integración por sustitución

Si f y ϕ son funciones de variable real tales que ϕ es derivable y la imagen de ϕ está contenida en el dominio de f y F es una primitiva de f entonces

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + C$$

Este es el caso en el que se hace $\phi(x) = t$ y $\phi'(x)dx = dt$

Ejemplo

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx$$

Si hacemos $\phi(x) = x + 1 = t$ se tiene

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + 1} dx = \arctan t = \arctan(x+1)$$

6. Integración por cambio de variable

Sean f y ϕ dos funciones definidas en los intervalos (a, b) y (c, d) , respectivamente, tales que ϕ transforma biyectivamente el intervalo (c, d) en (a, b) y tanto ϕ como ϕ^{-1} son derivables. Si la función f definida por

$$g(t) = f(\phi(t))\phi'(t), \quad t \in (c, d),$$

admite como primitiva G , entonces se tiene que:

$$\int f(x) dx = G(\phi^{-1}(x)) + C.$$

La función ϕ es el denominado *cambio de variable*. Es usual representar, abusando de la notación las identidades $dx = d\phi(t) = \phi'(t)dt$, ya que por costumbre se pone $x = \phi(t)$.

Ejemplo

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx \text{ haríamos } x = \sqrt{3} \sin t.$$

Nota: Si la integral que obtenemos al hacer estos cambios es más complicada de resolver que la inicial, obviamente el camino elegido no es el más apropiado y buscaremos otro cambio más adecuado.

7. Integración de funciones racionales.

Son integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de coeficientes reales y exponentes naturales. El proceso general para su resolución es el siguiente:

Se comprueba primeramente que no es inmediata del tipo logaritmo.

Ejemplo

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

Se comprueba que el grado de $P(x)$ no sea mayor que el de $Q(x)$. Si lo fuera bastaría con efectuar la división de los polinomios $P(x)$ entre $Q(x)$ y nos quedaría una expresión del tipo:

$$P(x) = R(x) + Q_1(x)Q(x)$$

y si dividimos la expresión anterior por $Q(x)$ e integramos obtenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx + \int Q_1(x) dx$$

donde en la primera integral el grado del numerador es inferior al del denominador, y la segunda integral es inmediata (del tipo potencial). Una vez superado este paso podemos suponer que el denominador es de grado superior al numerador.

Ejemplo

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

Se calculan las raíces o ceros del denominador, $Q(x) = 0$, lo cual conduce a los siguientes casos:

1. Los ceros del denominador son reales y simples.

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x = a, x = b, \dots$$

En este caso los pasos a seguir son los siguientes:

Primeramente se efectúa la descomposición de $P(x)/Q(x)$ en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots$$

en esta expresión hay que determinar los coeficientes $A, B, \dots$

Para ello se pueden seguir distintos métodos: una vez eliminados los denominadores, multiplicando ambos miembros por $Q(x)$, se pueden dar valores a x y plantearlo como una igualdad de funciones o bien

plantearlo como una igualdad de polinomios, igualando los coeficientes de las mismas potencias en ambos miembros.

Una vez obtenida esta descomposición observemos que la integral de partida se ha transformado en una suma de integrales inmediatas del tipo logaritmo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots$$

Ejemplo

$$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx$$

2. Los ceros del denominador son reales y múltiples.

Si

$$Q(x) = (x-a)^m (x-b)^n \dots$$

la descomposición sería

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \dots \end{aligned}$$

y, como en el caso de las raíces reales simples, multiplicando ambos miembros por $Q(x)$, por igualación de las expresiones resultantes, calculamos $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ lo cual conduce a integrales del tipo

$$\int \frac{1}{x-a} dx, \int \frac{1}{(x-a)^p} dx$$

que son inmediatas

Ejemplo

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$$

multiplicando por $(x-1)^3$ se tiene

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$x^2 = Ax^2 + (-2A + B)x - B + C \iff A = 1; B = 2; C = 2$$

3. El denominador tiene una raíz imaginaria simple.

Primeramente vamos a tratar este caso de forma muy particular; buscamos resolver una integral del tipo:

$$\int \frac{Mx + N}{px^2 + qx + r} dx,$$

donde el denominador tiene dos raíces complejas imaginarias y conjugadas. Es decir, el denominador es un polinomio de grado 2 irreducible:

$$px^2 + qx + r = 0 \Rightarrow x = a \pm bi,$$

Ejemplo 1

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 4} dx$$

en nuestro caso particular

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4}.$$

en el conjunto de los números reales no existe ningún elemento cuyo cuadrado sea -4 . Así aparecen los números complejos. Son números de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y denotamos por i un nuevo *número* no real cuyo cuadrado es -1 . Es decir, $i^2 = -1$ o también denotamos por i a $\sqrt{-1}$ entonces podemos escribir $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i$. Con este convenio podemos trabajar con raíces de números negativos, al menos, formalmente, lo que nos permite calcular primitivas de algunas funciones.

Si ahora retomamos nuestro ejemplo podemos escribir

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx,$$

la primera pertenece al grupo de logaritmos neperianos: si nos fijamos, la derivada del denominador es $2x$ y en el numerador aparece x , de modo que si la escribimos en la forma

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx$$

simplemente multiplicando y dividiendo por 2 queda una integral inmediata

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4)$$

en cuanto a la segunda,

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

es de apariencia similar a

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x$$

para que escribirla de manera parecida a esta última efectuamos lo siguiente:

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{x^2}{4} + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx.$$

Ahora bien, para que la última integral sea arco tangente falta que la derivada de $\frac{x}{2}$ figure en el numerador. Y ese se consigue multiplicando por 2 fuera de la integral y por $\frac{1}{2}$ dentro:

$$\frac{1}{4} 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctan x,$$

y reuniendo todo queda:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \arctan x.$$

Este resultado es general en las integrales con raíces complejas simples en el denominador: dan lugar a logaritmos y arco tangentes.

Ejemplo 2

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+8} dx$$

En primer lugar comprobamos que el numerador $x+1$ no es la derivada del denominador x^2+4x+8 o la misma multiplicada por una constante: $(x^2+4x+8)' = 2x+4$.

A continuación resolvemos la ecuación $x^2 + 4x + 8 = 0$ y obtenemos $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{2}$. Como aparecen raíces cuadradas de números negativos tenemos raíces complejas en el denominador. Observemos que:

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + () + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x + 2)^2 + 4 \quad (1)$$

Ahora escribimos la integral en la forma

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx = \int \frac{x + 1}{(x + 2)^2 + 4} dx$$

esta última integral, en general, da lugar a un logaritmo neperiano $\ln$ porque, parte se puede escribir en la forma

$$\int \frac{u'}{u} du = \ln u$$

y la otra a un arcotangente $\arctg$ porque, parte se puede escribir en la forma

$$\int \frac{u'}{u^2 + 1} dx.$$

Lo primero que tenemos que lograr es el logaritmo neperiano. Para ello necesitamos que la derivada del denominador $(x^2 + 4x + 8)' = 2x + 4$ aparezca en el numerador.

Pero en el numerador tenemos $x + 1$. Nos fijamos en el coeficiente que multiplica a x en la derivada de $x^2 + 4x + 8$ y ese número es 2 por este motivo multiplicamos y dividimos por 2 la integral:

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 4x + 8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 4x + 8} dx.$$

Pero necesitamos $2x + 4$ en el numerador. Por consiguiente procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 4x + 8} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 + 4 - 4}{x^2 + 4x + 8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4 - 2}{x^2 + 4x + 8} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 8} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2}{x^2 + 4x + 8} dx \end{aligned}$$

Si nos fijamos en la primera integral es un logaritmo neperiano. La derivada del denominador se encuentra en el numerador:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8).$$

En este momento sabemos que la segunda integral

$$\frac{1}{2} \int \frac{-2}{x^2+4x+8} dx$$

es un arcotangente. Nuestro objetivo es conseguir escribirla en la forma

$$\int \frac{u'}{u^2+1} dx.$$

Hay que lograr escribir, de alguna manera, escribir x^2+4x+8 en la forma u^2+1 .

Sabemos que el denominador se puede expresar como $(x+2)^2+4$, ver (1). Entonces

$$\frac{1}{2} \int \frac{-2}{x^2+4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2}{(x+2)^2+4} dx$$

y así se tiene:

$$\frac{1}{2} \int \frac{-2}{x^2+4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2}{(x+2)^2+4} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int \frac{-2}{\frac{(x+2)^2}{4}+1} dx$$

Nótese que, en este último pase hemos sacado factor común de 4 en el denominador. En este punto la integral se puede poner en la forma:

$$\frac{1}{8} \int \frac{-2}{\frac{(x+2)^2}{4}+1} dx$$

En este punto la integral tiene bastante parecido con la

$$\int \frac{u'}{u^2+1} dx = \arctan u.$$

para lo cual se expresa

$$\frac{1}{8} \int \frac{-2}{\frac{(x+2)^2}{4}+1} dx = \frac{-2}{8} \int \frac{1}{\frac{(x+2)^2}{4}+1} dx = \frac{-1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} dx$$

$$= \frac{-1}{4} 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{-1}{2} \arctan \frac{x+2}{2}$$

Ahora podemos escribir el resultado final:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+8} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + C.$$

4. Los ceros del denominador son reales (múltiples o no) y complejos de multiplicidad 1.

Ejemplo 3

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

8. Integración de funciones trigonométricas

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en senos y cosenos: $\int R(\sin x, \cos x)$, donde R es una función racional.

Cambio general

Este cambio se aplica, en general, cuando no hay potencias de las funciones seno y coseno. Se trata de:

$$\tan \frac{x}{2} = t$$

Calculemos los elementos necesarios para este cambio de variable:

$$\frac{x}{2} = \arctan t \implies x = 2 \arctan t \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\int \frac{1}{4 + 2 \operatorname{sen} x - \cos x} dx = \int \frac{1}{4 + \frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{2}{t^2 + 4t + 3} dt$$

Puesto que $t^2 + 4t + 3 = (t+3)(t+1)$, descomponiendo en fracciones simples, sigue que

$$\int \frac{2}{t^2 + 4t + 3} dt = \int \frac{1}{t+1} dt - \int \frac{1}{t+3} dt = \ln |t+1| - \ln |t+3| + C$$

y deshaciendo el cambio queda:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C$$

El integrando es impar en seno.

Formalmente se dá este caso si

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

La sustitución a efectuar en este caso es:

$$\cos x = t$$

Calculemos los elementos necesarios para la sustitución:

$$\cos x = t \implies x = \arccos t$$

derivando esta expresión llegamos a:

$$dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

De la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obtenemos que:

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \implies \sin x = \sqrt{1 - t^2}$$

En resumen, lo que realmente necesitamos para este cambio es:

$$\cos x = t, \quad \sin x = \sqrt{1 - t^2}, \quad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Ejemplo

$$\int \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x} dx$$

Es impar en seno. Hacemos $\cos x = t$ y queda

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{1 - t^2}(t^2 - 1 + t^2)}{t} \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}} = - \int \frac{1 - 2t^2}{t} dt \\ & = \int 2t dt - \int \frac{1}{t} dt = t^2 - \ln t + C = \cos^2 x - \ln \cos x + C \end{aligned}$$

El integrando es impar en coseno

Este caso se obtiene cuando

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

El cambio correcto en este caso es:

$$\sin(x) = t$$

Efectuemos las operaciones oportunas para poder realizar el cambio de variables deseado:

$$\sin x = t \implies x = \arcsin(t)$$

si derivamos:

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

y usando la misma igualdad que anteriormente obtenemos los cálculos necesarios:

$$\sin x = t, \quad \cos(x) = \sqrt{1 - t^2}, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Ejemplo

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

Es impar en coseno. Hacemos $\operatorname{sen} x = t$ y queda

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int \left(-1 + \frac{1}{1-t^2} \right) dt$$

Por descomposición en fracciones simples se puede escribir:

$$\int \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} \right) dt = -t + \frac{1}{2} \ln |t+1| - \frac{1}{2} \ln |t-1| + C$$

y, deshaciendo el cambio de variable, queda como resultado

$$-\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} \right| + C = -\operatorname{sen} x + \ln \sqrt{\left| \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} \right|} + C$$

El integrando es par en seno y coseno Este caso se traduce por

$$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

El cambio a realizar es:

$$\operatorname{tg} x = t$$

Calculemos los elementos necesarios para llevar a cabo la sustitución:

$$\operatorname{tg} x = t \implies x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Ahora bien, de la igualdad fundamental de la Trigonometría se deduce que

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

es decir,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

o bien,

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Ejemplo

$$\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^6 x} dx$$

Es par en seno y coseno. Se hace $\operatorname{tg} x = t$ y queda

$$\int \frac{t^4}{\frac{(1+t^2)^2}{1}} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^4 dt = \operatorname{tg}^4 x + C$$

Integración de productos del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$

En especial, en el caso de $m > 0$, $n > 0$, si alguno de ellos es impar tenemos en cuenta que $\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{m-1} x \operatorname{sen} x$ y como $m-1$ es par se aplica que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y el cambio $\cos x = t$ resuelve la situación.

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \operatorname{sen} x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - t^2)^2 t^4 (-dt) \end{aligned}$$

ya que $-\operatorname{sen} x dx = dt$.

El caso de una potencia impar en coseno es análogo, haciendo uso de la fórmula fundamental de la Trigonometría.

En el caso de que m y n sean pares se hace uso de la fórmula del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}, \quad \cos^2 = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2 2x)^2 dx = \frac{1}{16} \int \operatorname{sen}^4 2x dx \\ &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos 8x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{64} \int (1 - 2 \cos 8x + \cos^2 8x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{64} \left(x - 2 \frac{\operatorname{sen} 8x}{8} + \int \frac{1 + \cos 16x}{2} dx \right) &= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{256} + \frac{x}{32} + \frac{1}{64} \frac{\operatorname{sen} 16x}{16} \\ &= \frac{3x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{256} + \frac{\operatorname{sen} 16x}{1024} + C \end{aligned}$$

Productos de seno y coseno de distintos ángulos

Ejemplo

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x dx$$

es suficiente aplicar la fórmula

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

y se transforma en:

$$\frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 7x + \cos x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 7x}{7} + \operatorname{sen} x \right) + C$$

9. Integración de algunas funciones irracionales

En general, las funciones irracionales carecen de primitiva salvo algunos casos especiales. Veamos algunos de los más significativos:

■

$$\int R(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

El cambio a efectuar en este caso es:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^M \quad \text{siendo} \quad M = m.c.m.\{p, \dots, s\}$$

Ejemplo

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

Con la notación del enunciado sería $a = d = 1$, $b = c = 0$, es decir,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x$$

y el cambio $x = t^4$ ya que 4 es el mínimo común múltiplo de 2 y 4.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{t}{1 + t^2} 4t^3 dt = \frac{4}{3} t^3 - 4t + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[4]{x} + C\end{aligned}$$

■

$$\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2}) dx$$

Se resuelve con el cambio $x = k \operatorname{sen} t$

Ejemplo

$$\int \sqrt{3 - x^2} dx$$

Se hace $x = \sqrt{3} \operatorname{sen} t$, $dx = \sqrt{3} \cos t dt$ y resulta

$$\int \sqrt{3 - 3 \operatorname{sen}^2 t} \sqrt{3} \cos t dt = \int \sqrt{3 \cos^2 t} \sqrt{3} \cos t dt = 3 \int \cos^2 t dt$$

Ahora teniendo en cuenta que $\cos^2 = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, la última integral se escribe en la forma:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \int (1 + \cos 2t) dt &= \frac{3}{2} \left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) + C = \frac{3}{2} (t + \operatorname{sen} t \cos t) \\ &= \frac{3}{2} \left(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{3}} + x \sqrt{3 - x^2} \right) + C\end{aligned}$$

■

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Se presentan tres casos:

1. Si $a > 0$ se efectúa el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ y se transforma en la integral de una función racional.

Ejemplo

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

Hacemos $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$, elevando al cuadrado ambos miembros se tiene

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow x + 1 = 2xt + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}$$

$$dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(1 - 2t)^2}; \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t}; \quad 1 + x = \frac{t^2 - 2t}{1 - 2t}$$

Ahora, sustituyendo en la integral propuesta queda

$$\int \frac{1}{\frac{t^2 - 2t}{1 - 2t} \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t}} \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(1 - 2t)^2} dt = 2 \int \frac{1}{t^2 - 2t} dt$$

Descomponiendo esta última en fracciones simples:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t - 2} dt - \int \frac{1}{t} dt &= \ln |t - 2| - \ln |t| + C \\ &= \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x| + C \end{aligned}$$

2. Si $c > 0$ se hace el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$ que la transforma en la integral de una función racional.

Ejemplo

$$\int \frac{1}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}} dx$$

Dado que $c = 1 > 0$ efectuamos el cambio $\sqrt{1 + x - x^2} = 1 + xt$, elevando al cuadrado en ambos miembros se tiene:

$$1 + x - x^2 = 1 + 2xt + x^2 t^2 \Rightarrow x - x^2 = 2xt + x^2 t^2$$

$$\Rightarrow 1 - x = 2t + t^2, \quad (x \neq 0) \Rightarrow x = \frac{1 - 2t}{t^2 + 1}$$

$$dx = \frac{2t^2 - 2t - 2}{(t^2 + 1)^2} dt;$$

$$\sqrt{1 + x - x^2} = 1 + t \frac{1 - 2t}{t^2 + 1} = \frac{-t^2 + t + 1}{t^2 + 1}; \quad 1 + x = \frac{t^2 - 2t - 2}{t^2 + 1}$$

Sustituyendo en la integral de partida queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\frac{t^2 - 2t + 2}{t^2 + 1} \frac{-t^2 + t + 1}{t^2 + 1}} \frac{2t^2 - 2t - 2}{(t^2 + 1)^2} dt \\ = -2 \int \frac{1}{t^2 - 2t + 2} dt \end{aligned}$$

en esta integral el denominador tiene raíces complejas $t = 1 \pm i$ y, por consiguiente, se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{1}{(t+1)^2 + 1} dt &= -2 \arctan(t+1) + C \\ &= -2 \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x} + 1\right) + C \end{aligned}$$

3. Si $a < 0$ y $c < 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones reales. Si $x = \alpha$ es una de ellas se efectúa el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$ que la transforma en la integral de una función racional.

Ejemplo

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 8}} dx$$

puesto que $a < 0$ y $c < 0$ resolvemos la ecuación $-x^2 - 6x - 8 = 0$, la cual tiene por soluciones $x = 2$ y $x = 4$. Hacemos el cambio

$$\sqrt{-x^2 - 6x - 8} = t(x-2) \Rightarrow -x^2 - 6x - 8 = -(x-2)(x-4) = t^2(x-2)^2$$

de lo cual sigue que

$$\begin{aligned} -(x-4) &= t^2(x-2) \Rightarrow x = \frac{2t^2 + 4}{t^2 + 1} \\ dx &= \frac{-4t}{(t^2 + 1)^2} dt, \quad \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = t \left(\frac{2t^2 + 4}{t^2 + 1} - 2 \right) \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

y, sustituyendo en la integral de partida, resulta

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{2t}} \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt &= -2 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -2 \operatorname{arc\,tg} t + C = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-x^2-6x-8}}{x-2} + C \\ &= -2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{-x+4}{x+2}} + C \end{aligned}$$

Cuando el coeficiente de x^2 es negativo, como en este caso, puede resultar útil escribirlo en la forma $-x^2 - 6x - 8 = a - (x - b)^2$.

Igualando los coeficientes en ambos miembros llegamos a que $a = 1$ y $b = 3$, con lo cual la integral se puede expresar en la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - (x-3)^2}} dx$$

entonces si hacemos el cambio $x - 3 = t$ se tiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \operatorname{arc\,sen} t + C = \operatorname{arc\,sen} (x-3) + C$$

tras deshacer el cambio. Esta otra forma, en muchos, casos simplifica los cálculos. En cualquier caso, la conveniencia de aplicar un procedimiento u otro es difícil de prever, de manera que se ha de elegir uno de ellos y, caso de que la integral resultante sea muy complicada cambiar al otro.

Veamos otro ejemplo:

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$$

Si hacemos $3 - 2x - x^2 = a - (x - b)^2$ se obtiene $a = 4$ y $b = -1$, con lo cual la integral se transforma en

$$\int \sqrt{4 - (x+1)^2} dx$$

y ahora el cambio $x - 1 = 2 \operatorname{sen} t$ conduce a

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 t} 2 \cos t \, dt &= 4 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt \\ &= 4 \int \cos^2 t \, dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2\left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) + C \\ &= 2t + 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x-1}{2} + (x-1) \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + C \\ &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + C \end{aligned}$$

10. Integración de fracciones racionales de funciones exponenciales

Se trata de integrales de la forma

$$\int R(x, a^x) dx$$

en la cual R representa una función racional.

Ejemplo

$$\int \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x - 2} dx$$

con el cambio $e^x = t$ la integral se transforma en:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 - t + 1}{t(t-2)} dt &= t + \frac{3}{2} \ln |t-2| - \frac{1}{2} \ln |t| + C \\ &= e^x + \frac{3}{2} \ln |e^x - 2| - \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

11. Las funciones hiperbólicas y su papel en el cálculo de primitivas