

Tema 4. CALCULO INTEGRAL - Curso 2020-21

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas por cambio de variable.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int x^2 \sqrt[3]{x^3 + 2} \, dx; \quad \text{(b)} \quad \int \frac{x \cos x^2}{\sin x^2} \, dx; \quad \text{(c)} \quad \int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3} \, dx \\ \text{(d)} \quad & \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 2}} \, dx; \quad \text{(e)} \quad \int e^{3 \cos 2x} \sin 2x \, dx; \quad \text{(f)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{1}{4}(x^3 + 2)^{4/3} \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{2} \ln |\sin x^2| \quad \text{(c)} \quad -\frac{4}{3(x^3 + 2)^2} \\ \text{(d)} \quad & \frac{4}{9}(x^3 + 2)^{3/4} \quad \text{(e)} \quad -\frac{1}{6}e^{3 \cos 2x} \quad \text{(f)} \quad 3(x+1)^{1/3} \end{aligned}$$

2. Calcular las siguientes integrales indefinidas por partes:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int x^2 \sqrt{1-x} \, dx; \quad \text{(b)} \quad \int x \cos x \, dx; \quad \text{(c)} \quad \int x^3 \sin x \, dx; \\ \text{(d)} \quad & \int \sin(\ln x) \, dx; \quad \text{(e)} \quad \int (1-x^2)e^{3x} \, dx; \quad \text{(f)} \quad \int \ln(x^2 + 2) \, dx. \\ \text{(g)} \quad & \int 3x \cos 2x \, dx. \quad \text{(h)} \quad \int (1-x)e^{-2x} \, dx \quad \text{(i)} \quad \int (1-x^2) \ln 4x \, dx. \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & -\frac{16}{105}(1-x)^{7/2} - \frac{8}{15}(1-x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \quad \text{(b)} \quad x \sin x + \cos x \\ \text{(c)} \quad & -x^3 \cos x + 6x \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \sin x \quad \text{(d)} \quad \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] \\ \text{(e)} \quad & -\frac{1}{27}(9x^2 - 6x - 7)e^{3x} \quad \text{(f)} \quad x \ln(x^2 + 2) - 2x + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \text{(g)} \quad & \frac{3}{4} \cos 2x + \frac{3}{2}x \sin 2x \quad \text{(h)} \quad \frac{1}{4}e^{-2x}(2x - 1) \\ \text{(i)} \quad & -\frac{1}{3}x^3 \ln 4x + \frac{1}{9}x^3 + x \ln 4x - x. \end{aligned}$$

3. Calcular las siguientes integrales indefinidas de funciones racionales:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \frac{dx}{x^2 - 4}; \quad \text{(b)} \quad \int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} \, dx; \quad \text{(c)} \quad \int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} \, dx; \\ \text{(d)} \quad & \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} \, dx; \quad \text{(e)} \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}; \quad \text{(f)} \quad \int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} \, dx; \\ \text{(g)} \quad & \int \frac{x^2 - 2}{(x^2 + 1)x^3} \, dx; \quad \text{(h)} \quad \int \frac{5x^3 - 3x^2 + 1}{(x+1)^4} \, dx; \quad \text{(i)} \quad \int \frac{\sin x}{\cos x(1 + \cos^2 x)} \, dx. \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \quad \text{(b)} -\frac{1}{6} \ln |x| + \frac{3}{10} \ln |x-2| - \frac{2}{15} \ln |x+3| \quad \text{(c)} \frac{1}{2} \ln |x| - \ln |x-1| + \frac{3}{2} \ln |x+2| \\
& \text{(d)} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| \quad \text{(e)} \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \arctan(x) \\
& \text{(f)} \ln |x-2| - \frac{2}{x-2} \quad \text{(g)} 3 \ln |x| + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2} \ln(x^2+1) \\
& \text{(h)} \frac{7}{3} \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{21}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + 18 \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)^5 \quad \text{(i)} \frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 x) - \ln |\cos x|
\end{aligned}$$

4. Calcular las siguientes integrales indefinidas de funciones trigonométricas:

$$\text{(a)} \int \sin^3 x \, dx; \quad \text{(b)} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx; \quad \text{(c)} \int \operatorname{ctg}^5 x \, dx$$

Solución:

$$\text{(a)} \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x \quad \text{(b)} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} \quad \text{(c)} \ln |\sin x| + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^4 x}$$

5. Calcular las siguientes integrales indefinidas de funciones:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \int x \sqrt{x^2-2} \, dx; \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{x \ln x}; \quad \text{(c)} \int \cos x \ln(\sin x) \, dx; \\
& \text{(d)} \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx; \quad \text{(e)} \int (\tan x + \cot x) \, dx; \quad \text{(f)} \int \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \, dx.
\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \frac{1}{3} (x^2-2)^{3/2} \quad \text{(b)} \ln |\ln x| \quad \text{(c)} [\ln(\sin x) - 1] \sin x \\
& \text{(d)} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x \quad \text{(e)} \ln |\sin x| - \ln |\cos x| \quad \text{(f)} \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + x - 2\sqrt{x+1}
\end{aligned}$$

6. Calcular:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \int_0^1 2xe^{2-4x} \, dx; \quad \text{(b)} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx; \quad \text{(c)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\
& \text{(d)} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} \, dx; \quad \text{(e)} \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) \, dx; \quad \text{(f)} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}; \\
& \text{(g)} \int_3^6 (x^2-4x) \, dx; \quad \text{(h)} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}; \quad \text{(i)} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{ctg} x \, dx.
\end{aligned}$$

$$\text{Solución: (a)} \frac{1}{8}e^2 - \frac{5}{8}e^{-2} \quad \text{(b)} 0; \quad \text{(c)} \frac{\pi}{4}; \quad \text{(d)} \frac{\pi}{16}; \quad \text{(e)} \frac{100}{3}; \quad \text{(f)} \frac{2}{3}(\sqrt{34}-5); \quad \text{(g)} 9; \quad \text{(h)} \frac{\pi}{3}; \quad \text{(i)} \ln \sqrt{3}$$

7. Calcular el área de la figura comprendida entre la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

Solución: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

8. Calcular el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX .

Solución: 8

9. Calcular el área limitada por la curva $x = y^2 + 4y$ y el eje OY .

Solución: $\frac{32}{3}$

10. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 2 \sin x$, $y = 4 \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución: $8\sqrt{5}$

11. Calcular el área limitada por los siguientes pares de curvas:

(a) $y = 2 - x^2$, $y = x$; (b) $y = x^4 - x^2$, $y = 3 - 3x^2$;
 (c) $x^2 + y^2 = 2$, $2y = x^2 + 1$; (d) $y = x^2 + 2x - 3$, $y = x - x^2$;
 (e) $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$; (f) $y = x^2 - 3$, $y = -2$.

Solución: (a) $\frac{9}{2}$; (b) $\frac{64}{15}$; (c) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; (d) $\frac{125}{24}$; (e) $\frac{64}{3}$; (f) $\frac{4}{3}$

12. Sabiendo que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx = 0'8669729871 \dots$$

evaluar la integral por los métodos de los trapecios y de Simpson con 4 subintervalos. Utilizar 6 cifras decimales con redondeo. ¿Cuántas cifras significativas válidas tiene cada aproximación?

Solución: (T) 0'8617323342, c.s.v. 1; (S) 0'8671137005, c.s.v. 3.

13. Calcular el valor de la integral

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

empleando el método de Simpson con 6 intervalos. Utilizar en los cálculos 6 dígitos con redondeo. ¿Cuántas cifras significativas válidas proporciona el resultado si tomamos 1'462651746... como valor de dicha integral?

Solución: 1'462873. 4 c.s.v.

14. a) Hallar el área limitada por la curva de ecuación $y = (x - x^2)e^x$ y el eje OX .

b) Calcular un valor aproximado de dicho área haciendo uso del método de los trapecios y de Simpson con 4 intervalos.

Solución: a) $3 - e$. b) (T) 0'262468; (S) 0'281261.

15. Área limitada por la curva de ecuación $y = x\sqrt{1-x}$ y el eje OX . Hallar utilizando la regla trapezoidal y la de Simpson con 8 intervalos un valor aproximado de la integral que permite calcular el área pedida.

Solución: Área = $\frac{4}{15}$. (T) 0'2563177568; (S) 0'260020306.

16. La función $T(t) = 47 + 3t - 0'5t^2$ aproxima la temperatura t horas después del mediodía en un día típico de agosto en Madrid. Encontrar la temperatura media entre el mediodía y las 6 de la tarde. Aproximar el resultado por medio de las reglas (a) trapezoidal y (b) de Simpson, con 4 intervalos.

Solución: $\bar{T} = 50$; (a) $\bar{T} \simeq 49'81$; (b) $\bar{T} \simeq 50$

17. Una empresa farmacéutica determina que el ingreso obtenido por la venta de x unidades de un producto está dado por $R(x) = 50 + 4x + 3x^2$. Calcular el ingreso medio para las ventas desde $x = 1$ a $x = 5$. Comparar el resultado con la media $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 R(n)$.

Solución: $\bar{R} = 93$; $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 R(n) = 95$

18. La velocidad de la sangre, en cm/seg, en una pequeña arteria está dada por $V(r) = \frac{P}{4wl}(R^2 - r^2)$, $0 \leq r \leq R$, donde P es la presión sanguínea, w es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria, R es el radio de la arteria y r es la distancia al centro de la arteria del punto donde medimos la velocidad. Encontrar el valor medio de $V(r)$ en el intervalo $[0, R]$.

Solución: $\bar{V} = \frac{PR^2}{6wl}$ cm/seg

19. El método de dilución de colorante se utiliza para medir la respuesta cardiaca con 6 mg de diluyente. La concentración en mg/L de diluyente en cada instante t está dada por la función

$$c(t) = 20te^{-0'6t}, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

donde t está medida en segundos. Encontrar la respuesta cardiaca.

Solución: 6'59 L/min.

20. Deteminar la respuesta cardiaca de un corazón durante 24 segundos, si se emplean 5 mg de tinta y la concentración en la aorta con respecto al tiempo es

$$c(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ -\frac{1}{40}(t^2 - 26t + 48), & \text{si } 2 \leq t \leq 24, \end{cases}$$

donde $c(t)$ se mide en mg/litro.

Aproximar el resultado por medio de las reglas (a) trapezoidal y (b) de Simpson, con 4 intervalos.

Solución: $R \simeq 0'11$ litros/seg; (a) $R \simeq 0'12$ litros /seg; (b) $R \simeq 0'11$ litros /seg

21. Evaluar la concentración media del problema anterior en el intervalo $[0, 24]$.

Solución: $\bar{c} \simeq 1'85$ mg/litro

22. Determinar la respuesta cardiaca de un corazón durante 30 segundos, si se emplean 5 mg de tinta y la función concentración es

$$c(t) = \begin{cases} \frac{4}{21}t, & \text{si } 0 \leq t < 15, \\ -\frac{4}{21}t + \frac{40}{7}, & \text{si } 15 \leq t \leq 30, \end{cases}$$

donde $c(t)$ se mide en mg/litro.

Solución: $R \simeq 0'12$ litros/seg

23. Evaluar la concentración media del problema anterior en el intervalo $[0, 30]$.

Solución: $\bar{c} \simeq 1'43$ mg/ litro

24. Se inyectan 5 mg de tinta en la arteria pulmonar de un paciente. Hallar la respuesta cardiaca durante un periodo de 30 segundos, si para determinar la concentración de tinta se han tomado las siguientes mediciones:

t	0	5	10	15	20	25	30
c(t)	0	1'25	2	2'25	2	1'25	0

Solución: $R \simeq 0'11$ litros/seg

25. El proceso respiratorio es cíclico y un ciclo completo desde la inhalación hasta la expulsión completa del aire toma alrededor de 5 s. La tasa máxima de flujo de aire en los pulmones es de 0'5 L/s. Esto explica, en parte, por qué la función

$$f(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi t}{5}$$

se ha utilizado a menudo como modelo matemático para la velocidad del flujo de aire en los pulmones. Si se produce una inhalación en el intervalo $0 < t < 2'5$, ¿cuál es la tasa media de flujo de aire durante la inspiración?.

Solución: 0'32 L/s.