

Tema 2. CÁLCULO DIFERENCIAL DE UNA VARIABLE REAL

1. Hallar la razón $\Delta y/\Delta x$ para la función $y = 1/x$, en el punto $x = 2$ si:

(a) $\Delta x = 1$; (b) $\Delta x = 0,1$; (c) $\Delta x = 0,01$

Comprobar que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(2)$.

Solución: (a) $-0,167$; (b) $-0,238$; (c) $-0,249$; $y'(2) = -0,25$

2. Encontrar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones:

(a) $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$ (b) $y = \operatorname{ctg}(\ln x)$

(c) $y = e^{x^x} = e^{(x^x)} \neq (e^x)^x$ (d) $y = \ln(x^2 e^x)$

(e) $y = \frac{2e^g - 1}{1 - g^2}$; $g = \cos^2(2x)$

Solución:

(a) $y' = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}$ (b) $y' = -\frac{\operatorname{cosec}^2(\ln x)}{x}$

(c) $y' = e^{x^x} x^x (1 + \ln x)$ (d) $y' = 1 + \frac{2}{x}$

(e) $y' = \frac{2e^g(1 - g^2) + 2g(2e^g - 1)}{(1 - g^2)^2} g'$, $g' = -2 \operatorname{sen}(4x)$

3. (*) Demostrar que

(a) $\left(\ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}} \right)' = \frac{1}{\cos 2x}$

(b) $\left(\ln \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}} \right)' = \frac{-1}{2(1-x)\sqrt{x}}$

(c) $\left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\left(\ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)' = \frac{x}{x^2 + x + 1}$

(e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right)' = \frac{2x^2}{1+x^4}$

4. a) Dada la función $y = e^{2x} + (1+x)e^{2x}$ demostrar que $y'' - 4y' + 4y = 0$.

b) (*) Dada la función $y = e^{ax}(m \cos(bx) + n \operatorname{sen}(bx))$, siendo a, b, m, n constantes, demostrar que $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.

5. (*) La ecuación del movimiento armónico de un péndulo es $s = s_o \operatorname{sen} wt$. Calcular la velocidad $v = \frac{ds}{dt}$ y la aceleración $b = \frac{dv}{dt}$ del péndulo. ¿Cuál es la expresión que relaciona s y b ?

Solución: $b + w^2 s = 0$

6. De la ecuación de Van der Waals $(PV^2 + a)(V - b) = kV^2$ deducir la variación de presión P por unidad de variación de volumen V .

$$\text{Solución: } P' = \frac{2a(V - b)^2 - kV^3}{V^3(V - b)^2}$$

7. Denotando por R la resistencia eléctrica en microohmios por cm^3 , y por x el porcentaje de aluminio en el acero, se verifica para el acero pobre en carbono la relación $R = 12 + 12x - 0,3x^3$. Hallar el incremento relativo de R respecto a x cuando $x = 4$.

$$\text{Solución: } R'(4) = -2,4$$

8. Según Bodenstein, si K es la constante de ionización del dióxido de nitrógeno, se tiene:

$$\ln K = 2,839 - \frac{5749}{T} + 1,75 \ln T - 0,0005T.$$

Además, si ΔH es el calor de disociación, se verifica la igualdad:

$$\frac{d(\ln K)}{dT} = \frac{RT^2}{\Delta H}$$

Hallar la expresión de ΔH .

$$\text{Solución: } \Delta H = \frac{RT^4}{5749 + 1,75T - 0,0005T^2}$$

9. La función

$$C(t) = 0,0225te^{-0,0467t}$$

se utiliza como modelo matemático para medir la concentración de alcohol en sangre una vez ingeridos 15 mL de una bebida alcoholica, donde t es el tiempo (en minutos) transcurrido desde la ingesta. C se mide en mg/mL.

- (a) ¿Con qué rapidez aumenta C al cabo de 10 minutos?
 (b) ¿Con qué rapidez disminuye transcurrida media hora?

$$\text{Solución: (a) } 0,00752 \text{ mg/mL/min; (b) } 0,00222 \text{ mg/mL/min.}$$

10. Supóngase que una enzima actúa sobre un sustrato. Si $A(t) = 45\sqrt{t}$ es la función que da en cada instante la cantidad de sustrato transformado, se pide:

- a) Calcular la tasa media de variación en el intervalo $[1,25]$.
 b) Calcular la velocidad de transformación.

$$\text{Solución: } T_m = 7,5; A'(t) = \frac{45}{2\sqrt{t}}$$

11. (*) Se bombea aire al interior de un balón de fútbol a razón de 50 cm^3 de aire por minuto. Encontrar la variación instantánea del radio del balón cuando éste mida 5 cm.

$$\text{Solución: } 0,16 \text{ cm/min.}$$

12. Si la cantidad de sustancia presente en una reacción química de tercer orden en el tiempo t (medido en segundos) es

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2kx_0^2t + 1}},$$

donde x_0 denota la cantidad inicial, determinar la velocidad media de variación de sustancia en los 5 primeros minutos de la reacción.

$$\text{Solución: } v_m = \frac{x_0}{300} \left(\frac{1}{\sqrt{600kx_0^2 + 1}} - 1 \right)$$

13. **Modelo logístico de Gause.** En un experimento con el protozoo *Paramecium*, el biólogo GF Gause modeló el tamaño de la población de protozoos con la función logística

$$P(t) = \frac{61}{1 + 31e^{-0,7944t}}$$

donde t se mide en días. Según este modelo, ¿cuál es la rapidez de crecimiento de la población después de 8 días ?

Solución: $2,35 \approx 2$ por día.

14. Un trabajo de 1995 detalla el efecto del inhibidor de la proteasa ABT-538 en el virus de la inmunodeficiencia humana VIH-1. La función

$$V(t) = 96,39785 \cdot (0,818656)^t$$

describe la carga viral en un paciente con VIH, t días después del tratamiento con ABT-538. Encontrar $V'(10)$ e interpretarlo.

Solución: Después de 10 días, la carga viral fue disminuyendo a un ritmo de 2,6 unidades por mL al día.

15. Mediante el empleo de diferenciales hallar los valores aproximados de

(a) $\sqrt[3]{25}$ (b) $\ln(1,12)$ (c) $\sin 31^\circ$

Solución: (a) 2.93; (b) 0.12; (c) 0.515

16. **Farmacocinética de un antibiótico.** Una vez ingerida una tableta de cierto antibiótico por una persona, la concentración del mismo en el torrente sanguíneo está dado por la función

$$C(t) = 8(e^{-0,4t} - e^{-0,6t})$$

donde t es tiempo transcurrido desde la toma medido en horas y C está medido en $\mu\text{g/mL}$. ¿Cuándo se alcanza la concentración máxima en las primeras 12 horas?.

Solución: Transcurridas 2 horas aproximadamente.

17. La efectividad de un cierto analgésico a las t horas de ser suministrado viene dado por:

$$E(t) = \frac{1}{27}(9t + 3t^2 - t^3) \quad (0 \leq t \leq 45).$$

- Hallar la velocidad media de variación de E en las primeras 2 horas.
- Hallar la velocidad instantánea a las 2 horas.
- Determinar en qué instante se alcanza la efectividad máxima.

Solución: (a) $v_m = 0,407$; (b) $E'(2) = 1/3$; (c) $t = 3$ horas

18. El modelo Kermack-McKendrick para transmisión de enfermedades infecciosas puede ser utilizado para predecir el tamaño de la población P como una función de la *virulencia* de la enfermedad (es decir, la medida en que la enfermedad mata a las personas). El tamaño de la población es grande cuando la virulencia v es baja y también es grande cuando la virulencia es alta debido a que la enfermedad mata a la gente tan rápido que muy pocas personas se infectan. Para una elección específica de las constantes, el tamaño de la población está dado por

$$P(v) = \frac{10 + v + v^2}{1 + v}, \quad 0 \leq v \leq 9.$$

Encontrar los valores menores y mayores de la población y la virulencia a la que estos se producen.

Solución: El mayor valor de P es 10 que se alcanza cuando $v = 0$ y $v = 9$. El menor valor de P es 5,32 y se alcanza cuando $v = -1 + \sqrt{10} \approx 2,16$ unidades.

19. La concentración $C(t)$ de una cierta sustancia química en la sangre, tras t horas de su inyección en el tejido muscular, está dado por: $C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}$. ¿Cuándo es máxima la concentración?

Solución: $t = 2,38$ horas

20. La resistencia R de un cierto tipo de resistor está dada por: $R = \sqrt{0,001T^4 - 4T + 100}$, donde R se mide en ohmios y la temperatura T en grados Celsius. ¿Qué temperatura produce una resistencia mínima para este tipo de resistor?

Solución: $T = 10^\circ\text{C}$

21. La potencia eléctrica P en vatios de un circuito (de corriente continua) con dos resistores de resistencias R_1 y R_2 conectados en paralelo es

$$P = \frac{vR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿qué resistencia R_2 da lugar a la potencia máxima?

Solución: $R_2 = R_1$

22. Entre 0°C y 30°C el volumen V (en cm^3) de 1 kg de agua a la temperatura T está dado aproximadamente por la fórmula

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

Encontrar la temperatura a la cual el agua alcanza su máxima densidad.

Solución: Densidad=cantidad/volumen. $T \approx 3,9665^\circ\text{C}$ maximiza la densidad. Nota: $T = 30^\circ$ es la temperatura que maximiza el volumen.

23. Dadas dos reacciones químicas consecutivas, la concentración de sustancia que se origina en la primera etapa viene dada por

$$C(t) = e^{-K_2t} \frac{K_1C_0}{K_2 - K_1} \left(e^{(K_2 - K_1)t} - 1 \right).$$

Sabiendo que $K_1 = 0,2 \text{ min}^{-1}$, $K_2 = 0,1 \text{ min}^{-1}$ y $C_0 = 1$, hallar el instante, a partir del comienzo de la reacción, en el que se presenta la mayor concentración y hallar dicha concentración máxima.

Solución: $t_0 = 10 \ln 2$; $C(t_0) = 0,5$

24. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la ecuación

$$C(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

donde t representa el tiempo en semanas. Hallar los valores de t que dan las concentraciones extremas.

Solución: máximo: $t_0 = 0$ semanas; mínimo: $t_1 = 1$ semana

25. La cantidad de producto transformado que se produce en un reactor homogéneo depende del tiempo que pasan los componentes en el reactor y viene dada por

$$m(t) = \frac{1200}{t + 1,5} e^{-1/t}.$$

Determinar en qué instante se obtiene la máxima cantidad de producto transformado.

Solución: $t = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \simeq 1,82$

26. Hallar la proporción en que deben encontrarse en el agua los iones H^+ y OH^- de manera que la suma total de contenidos en la unidad de volumen sea mínima, sabiendo que por la *ley de acción de masas* se verifica $[H^+][OH^-] = K$, siendo $K = 10^{-14}$ la constante de disociación del agua. SUGERENCIA: Póngase $x = [H^+]$ e $y = [OH^-]$.

Solución: $[H^+] = [OH^-] = 10^{-7}$

27. (*) Hallar en la hipérbola $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = 1$ los puntos más próximos al punto $(3, 0)$.

Solución: $(2, 1)$ y $(2, -1)$.

28. Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

Solución: $\sqrt{15}$ y $2\sqrt{15}$ cm (dimensiones del texto); $2 + \sqrt{15}$ y $4 + 2\sqrt{15}$ cm (dimensiones de la página).

29. Una lata de conservas tiene forma cilíndrica. Hallar las dimensiones más ventajosas de la lata, esto es, determinar la relación entre el diámetro de la base y la altura del cilindro, de modo que se obtenga el volumen máximo con la superficie total prefijada.

Solución: Si R es el radio de la base y h la altura de la lata, debe cumplirse $h = 2R$.

30. Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2000000 € y en tierra es de 1000000 €, ¿a qué distancia hacia el este debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?

Solución: A $\frac{20}{\sqrt{3}} \simeq 11,547$ km.

31. (*) Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia de 1 metro sobre el nivel de los ojos del observador, mientras que el borde superior a una distancia de 2 metros. ¿A qué distancia de la pared debe situarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el máximo?

Solución: $\sqrt{2}$ metros.

32. En un concurso de resistencia, los participantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar 4 millas por hora y correr 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?

Solución: Hacia el punto ubicado a $\sqrt{\frac{16}{21}} \simeq 0,873$ millas.

33. Dos barcos salen al mismo tiempo: uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h; el otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más próximos entre sí?

Solución: A las 0,3 horas.

34. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de P metros, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

Solución: $x = \frac{2P}{4+\pi}$, $y = \frac{P}{4+\pi}$.

35. Determinar dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

36. Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Halla ambos números para que el producto sea máximo.

37. De entre todos los rectángulos de perímetro 8 calcular el que tiene área máxima.

38. Si se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino y la valla del lado del camino cuesta 80 euros el metro y la de los otros lados 10 euros el metro, hallar el área del mayor campo que puede cercarse con 28800 euros.

39. De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 4, determinar las dimensiones del que tenga área máxima.

40. De entre todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, hallar las dimensiones del que tiene volumen máximo.

41. Una caja con tapa y base cuadrada debe de tener un volumen de 160 cm^3 . El precio del material utilizado para la base es de 3 euros por cm^2 y el utilizado para las caras laterales y la tapa es de 2 euros por cm^2 . Minimizar el coste de construcción de dicha caja.

42. Calcular las dimensiones de un triángulo isósceles de 60 cm de perímetro para que su área sea máxima.

43. Se dispone de un trozo cuadrado de cartón cuyo lado mide 6 cm. De sus esquinas se quitan cuatro cuadrados iguales para hacer con el cartón restante una caja sin tapa cuyo volumen se quiere maximizar. Determinar el valor exacto de cartón que debe quitarse de las esquinas.

44. Un agricultor dispone de 3000 euros para cercar un terreno rectangular usando el río adyacente como lado con el fin de que el recinto únicamente necesite tres cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro instalado y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de 3 euros por metro. Calcular las dimensiones del terreno de área máxima que puede cercarse con el presupuesto del que se dispone.

45. Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determinar el número de cepas que se deben plantar nuevas para que la producción de uvas de la finca sea máxima.