

1. obtener

①

$$A = \sqrt{\frac{10,325 + 0,461}{2,683 \times 3,141}}$$

Sabiendo que cada uno de los números que están en la expresión tiene todas sus cifras significativas.

Soluc

$$A = \sqrt{\frac{a+b}{a \cdot d}} = 1,13132114...$$

$$a = 10,325 \pm 0,0005$$

$$c = 2,683 \pm 0,0005$$

$$b = 0,461 \pm 0,0005$$

$$d = 3,141 \pm 0,0005$$

Atendiendo a los resultados teóricos

$$\delta A = \frac{1}{2} (\delta a + b + \delta c + \delta d)$$

$$\delta_{a+b} = \frac{\Delta_{a+b}}{a+b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{a+b} = \frac{0,0005 + 0,0005}{10,325 + 0,461} = \frac{0,001}{10,786} = 9,271 \times 10^{-5}$$

$$\delta_c = \frac{\Delta_c}{c} = \frac{0,0005}{2,683} = 0,00019$$

$$\delta_d = \frac{\Delta_d}{d} = \frac{0,0005}{3,141} = 0,00016$$

$$\delta A = \frac{1}{2} (0,00009271 + 0,00019 + 0,00016) = 0,000219$$

dado que:

$$\delta_A = \frac{\Delta A}{A}; \quad \Delta A = \delta_A \cdot A = 1,13132114 \cdot 0,000219,$$

$$\Delta A = 0,00024$$

x x x x
↓
< 5

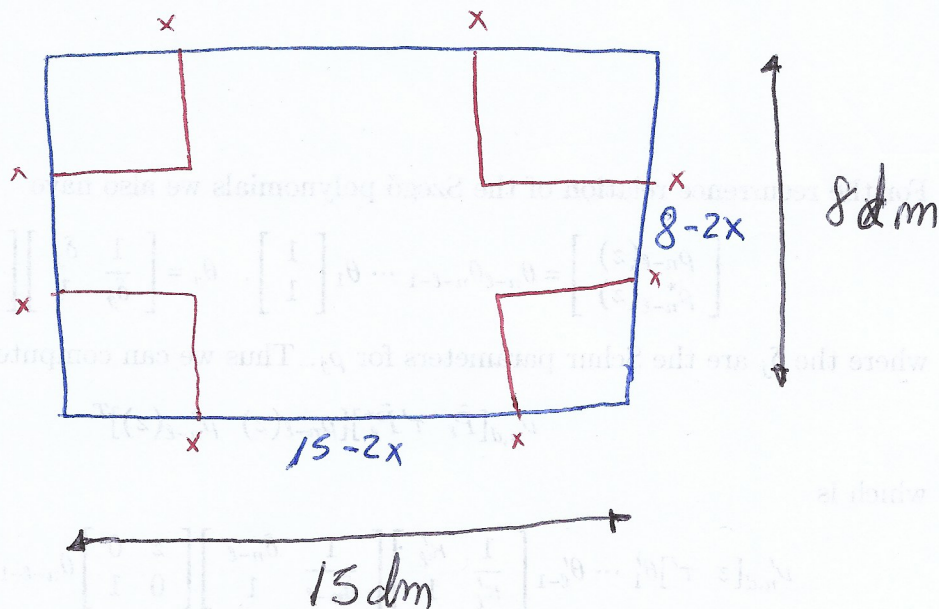
4 cifras significativas

luego

$$\tilde{A} = 1,131$$

2

3



Volumen = ancho $\times$ largo $\times$ altura = $(8-2x)(15-2x) \cdot x$

$V(x) = (8-2x)(15-2x)x \quad 0 < x < 4$

Estudiamos sus puntos críticos

$V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x \quad 0 < x < 4$

$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 4(3x^2 - 23x + 30)$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 23x + 30 = 0$

$x^{\pm} = \frac{23 \pm \sqrt{(23)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 30}}{3 \cdot 2}$

$x^+ = 6$

$x^- = \frac{5}{3}$

$x^+ = 6$ no puede ser, ya que $0 < x < 4$

Vamos a verificar que es máximo

$V''(x) = 4(6x - 23)$

$V''(\frac{5}{3}) = 4(6 \cdot \frac{5}{3} - 23) = 4(10 - 23) < 0$

es un máximo

por lo tanto, las dimensiones son

④

largo $l = 15 - 2 \times \frac{5}{3} = 15 - \frac{10}{3} = \frac{35}{3} \text{ dm}$

ancho $a = 8 - 2 \times \frac{5}{3} = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3} \text{ dm}$

altura $h = \frac{5}{3} \text{ dm}$

③ Se ha modificado la concentración de alcohol ⑤
en rango mediante

$$C(t) = 0,0225 \cdot t \cdot e^{-0,0467t} \quad \begin{array}{l} t \text{ en minutos} \\ \text{on minutes} \end{array}$$

Nos pide la rapidez con la que varía la concentración en

$$t = 10 \text{ m y } t = 30 \text{ m}$$

Sol

$$C'(t) = 0,0225 \left(e^{-0,0467 \cdot t} - 0,0467t e^{-0,0467 \cdot t} \right)$$

$$= 0,0225 e^{-0,0467 \cdot t} (1 - 0,0467 \cdot t)$$

$$C'(10) = 0,0225 \cdot e^{-0,0467 \cdot 10} (1 - 10 \times 0,0467)$$

$$= 0,0225 \cdot e^{-0,467} (1 - 0,467)$$

$$= 0,0225 \cdot e^{-0,467} \cdot 0,533 = 0,007517 > 0$$

poco, pero aún está creciendo

la concentración en rango

$$C'(30) = 0,0225 e^{-0,0467 \cdot 30} (1 - 30 \times 0,0467)$$

$$= 0,0225 e^{-1,401} (1 - 1,401)$$

$$= 0,0225 \cdot e^{-1,401} (-0,401)$$

$$= -0,00227 < 0$$

está decreciendo la concentración de alcohol
en rango

④

Determinar los extremos relativos de la función:

⑥

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$$

Soluc

En primer lugar hay que determinar los puntos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 12xy^2 + 24x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 12x^2y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$4x^3 + 12xy^2 + 24x^2 = 0 \quad \equiv \quad 4x(x^2 + 12y^2 + 6x) = 0$$

$$4y^3 + 12x^2y = 0 \quad \equiv \quad 4y(y^2 + 3x^2) = 0$$

$$(a) \quad 4x(x^2 + 12y^2 + 6x) = 0 \quad \begin{matrix} (a_1) \\ \swarrow \end{matrix} \quad x = 0$$

$$(a_2) \quad x^2 + 12y^2 + 6x = 0$$

$$(b) \quad 4y(y^2 + 3x^2) = 0 \quad \begin{matrix} (b_1) \\ \swarrow \end{matrix} \quad y = 0$$

$$(b_2) \quad y^2 + 3x^2 = 0$$

$$i) \quad (a_1) \wedge (b_1) \quad x = 0, y = 0 \quad (0, 0)$$

$$ii) \quad (a_1) \wedge (b_2) \quad x = 0; \quad 3y^2 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (0, 0)$$

$$iii) \quad x^2 + 12y^2 + 6x = 0 \quad y = 0 \quad \equiv \quad x^2 + 6x = 0 \quad \equiv \quad x(x + 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ o } x = -6$$

$$(0, 0), (-6, 0)$$

iv)

$$(a2) \quad x^2 + 12y^2 + 6x = 0 \quad 0 = 0$$

$$(b2) \quad y^2 + 3x^2 = 0$$

la suma de los números no negativos igual a cero deben ser cero ambos

$$x = 0 \quad y = 0$$

Por lo tanto, los únicos puntos críticos son

$$(0,0) \text{ y } (-6,0)$$

Vamos a estudiar la naturaleza con el correspondiente Hessiano

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 12y^2 + 48x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 24xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 + 12x^2$$

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 + 12y^2 + 48x & 24xy \\ 24xy & 12y^2 + 12x^2 \end{vmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{El criterio no decide}$$

$$H_f(-6,0) = \begin{vmatrix} 12(-6)^2 - 48 \cdot 6 & 0 \\ 0 & 12(-6)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 \times 48 & 0 \\ 0 & 9 \times 48 \end{vmatrix} = 24 \times 48 > 0$$

$$H_f(-6,0) > 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-6,0) > 0 \quad \text{num mínimo} \quad (8)$$

(5) Dada la función

$$f(x,y) = \tan(x-y)$$

Determinar

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Sol.

Sea $g(u) = \tan(u)$

$$g'(u) = (1 + \tan^2(u)) h'(u) = \frac{h'(u)}{\cos^2(u)}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x-y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{\cos^2(x-y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos^{-2}(x-y) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos^{-2}(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (-2) \cos^{-3}(x-y) (-\sin(x-y)) = \frac{2 \sin(x-y)}{\cos^3(x-y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = - \left\{ (-2) \cos^{-3}(x-y) (-\sin(x-y)) (-1) \right\}$$

$$= \frac{2 \sin(x-y)}{\cos^3(x-y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\cos^2(x-y)} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos^{-2}(x-y) \right) = (-2) \cos^{-3}(x-y) (-\sin(x-y))(-1)$$

$$= -2 \frac{\sin(x-y)}{\cos^3(x-y)}$$

luego

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = \frac{2 \sin(x-y)}{\cos^3(x-y)} \cdot \frac{2 \sin(x-y)}{\cos^3(x-y)} - \frac{4 \sin^2(x-y)}{\cos^6(x-y)}$$

$$= 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(6a)

Comprobar $\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = 0,405465108 \dots$

testearlo aproximando con Simpson con 4 intervalos con precisión de 6 decimales y redondeo

Soluc

$$\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

Vamos a calcular la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t dt}{(t^2-1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2-1}$$

con el fin de esquivar la raíz cuadrada hacemos el cambio

$$x+1 = t^2, \text{ luego sus diferenciales se relacionan}$$

$$\text{con } dx = 2t dt$$

reduciéndolo a una integral de una función racional, cuyo denominador se anula en $t = 1$ y $t = -1$. Realizaremos la descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \quad \equiv \quad 1 = A(t+1) + A(t-1), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ll} t=1 & 1 = A(1+1) \quad A = \frac{1}{2} \\ t=-1 & 1 = A(-1-1) \quad B = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1}$$

Resumiendo

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t-1| - \ln|t+1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$$

destacamos el cambio de variable

Concluimos que

$$\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| \Bigg|_{x=3}^{x=8}$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}+1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}+1} \right| = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \\ = \ln \frac{3}{2} = 0.40546 \dots$$

Desa Varmen a calcular $S_4(f)$ asociado a

(11)

$$\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

con 4 intervalos

$$h = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$$

hago los nodos con $x_k = 3 + k \frac{5}{4}$, $k=0,1,2,3,4$

dado que $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ y $S_4(f) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$

x_i	3	$\frac{17}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{27}{4}$	8
$f(x_i)$	0,166667	0,102691	0,071315	0,053216	0,041667

Entonces

$$S_4(f) = \frac{5}{3} \left(0,166667 + 4 \times 0,102691 + 2 \times 0,071315 + 4 \times 0,053216 + 0,041667 \right)$$

$$S_4(f) = \frac{5}{12} \times 0,974592 = 0,40608$$

$$\text{ERROR} = 0,405465108 \dots - 0,40608 = -0,0006148$$

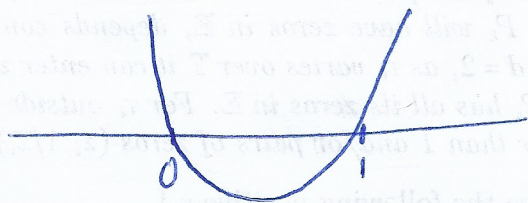
$$\text{valor exacto: } 0,405465108$$

xxx
↓
7,5
2 cifas signific.

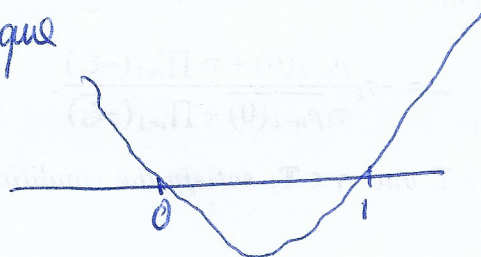
(66) Área limitada por la función $y = (x^2 - x)e^{-x}$ y el (12)
eje OX .

Soluce

Observamos que $x^2 - x = x(x-1)$ es una parábola que corta al eje OX en $x=0$ y $x=1$



Por lo tanto, si le multiplicamos por una función e^{-x} que es siempre positiva, se sigue que



Por lo tanto, el área que limita la curva $y = (x^2 - x)e^{-x}$ y el eje OX

$$\text{es: } - \int_0^1 (x^2 - x) e^{-x} dx = \int_0^1 (x^2 - x) \underbrace{(-e^{-x})}_{dv} dx = \left[(x^2 - x) e^{-x} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (2x - 1) e^{-x} dx$$

aplicamos "por partes" dos veces para bajar el grado de $x^2 - x$

$$= \left[(1^2 - 1) e^{-1} - (0^2 - 0) e^{-0} \right] + \int_0^1 (2x - 1) \underbrace{(-e^{-x})}_{dv} dx = \left[(2x - 1) e^{-x} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$- 2 \int_0^1 e^{-x} dx = (2 \cdot 1 - 1) e^{-1} - (2 \cdot 0 - 1) e^{-0} + 2 \int_0^1 (-e^{-x}) dx$$

$$= \left[\frac{1}{e} + 1 + 2 e^{-x} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{e} + 1 + 2(e^{-1} - 1) = \frac{3}{e} - 1$$

$$= 0,1036383 \dots$$