

Teoría de errores

Operaciones con números aproximados

1. Introducción

Todas las ciencias experimentales se basan en observaciones cuantitativas que llamamos medidas. La medida de cualquier magnitud se expresa por un número acompañado de la unidad en la que se ha medido y que presta su significado al número. Pero el proceso de medida está sujeto inevitablemente a una serie de limitaciones que se traducen en la existencia de cierta incertidumbre en el número obtenido, debido entre otras causas, a la imperfección de los instrumentos de medida. Consecuentemente, el resultado de una medida solo tiene sentido si, además del número obtenido y su unidad correspondiente, va acompañado de otro número, denominado error, que da cuenta de la incertidumbre asociada a ella. Debemos entender que, la palabra *error* no significa *equivocación* o *fallo*, sino que se refiere a la incertidumbre inevitable que existe al realizar cualquier medida.

En el proceso de resolver un problema tratamos con diversos números, los cuales pueden ser exactos o aproximados. Los números exactos dan el valor verdadero de un número. Los números aproximados dan un valor cercano al valor verdadero, el grado de acercamiento depende del error de cálculo.

Por ejemplo, en las afirmaciones *un cubo tiene 6 caras, tenemos 5 dedos en cada mano, hay 103 estudiantes en clase 2*, los números 6, 5 y 103 son exactos. Sin embargo, en las afirmaciones *la casa mide 14'25 m de ancho, el radio de la Tierra es 6.000 km, la masa de una caja es 10 gr*, los números 14'25, 6.000 y 10 son aproximados.

Esto está motivado, sobre todo, por la imperfección de los instrumentos de medida que utilizamos. No existen instrumentos de medida exactos, cada uno tiene su propia precisión, es decir, admite un cierto error de medida. Además, en el segundo ejemplo entra en juego el concepto de radio de la Tierra.

En la práctica, sobrentendemos que un número aproximado a es aquel que difiere poco del número exacto A y que puede ser sustituido por él en los cálculos.

Se entiende que una aproximación a es por defecto del número A si es menor que A y por exceso si es mayor.

2. Notación científica

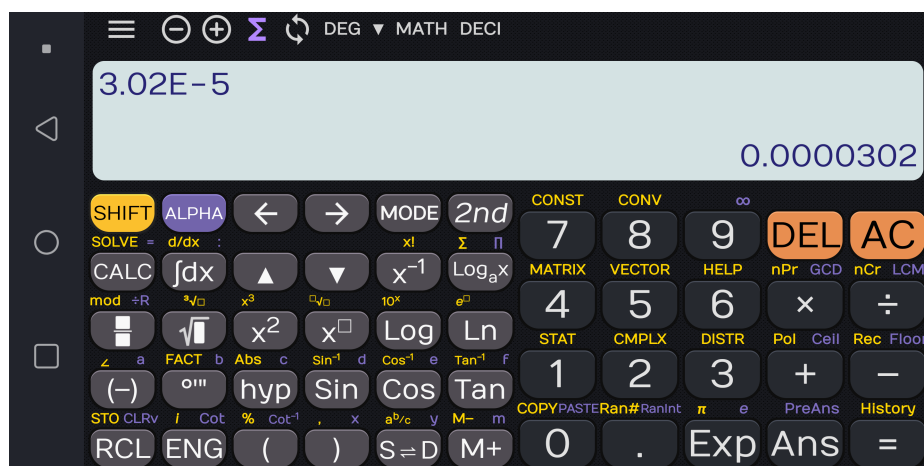
Un número escrito en notación científica sigue el siguiente patrón:

$$m \times 10^k = m \cdot 10^k$$

El número m se denomina mantisa y k el orden de magnitud. La mantisa, en valor absoluto, deber ser mayor o igual que 1 y menor que 10, y el orden de magnitud es el exponente.

Ejemplo 2.1.

- $500 = 5 \times 10^2 = 5 \cdot 10^2$
- $38000 = 3'8 \times 10^4 = 3'8 \cdot 10^4$
- $1'003 = 1'003 \times 10^0 = 1'003 \cdot 10^0$
- $0'00031 = 3'1 \times 10^{-4} = 3'1 \cdot 10^{-4}$
- $0'003 = 3 \times 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3}$
- $6'02 \times 10^{23} = 6'02 \cdot 10^{23}$ *constante de Avogadro.*
- $100,000,000,000 = 1 \times 10^{11}$
- $0'000000000001 = 1 \times 10^{-11}$
- $0'0000302 = 3'02 \times 10^{-5}$



3. Redondeo y truncamiento de un decimal

Podemos aproximar un número decimal por otro que tenga menor número de cifras decimales. Esto podemos hacerlo de dos formas distintas:

1. Mediante *truncamiento* Dejamos el número de decimales deseado, quitando los demás.
2. Mediante *redondeo* La cifra que redondeamos aumenta en uno si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5. En otro caso no varía.

Ejemplo 3.1. Si $A = 3'14516$ y lo truncamos a cuatro cifras decimales se obtiene $a = 3'1451$; en cambio, si lo redondeamos a cuatro cifras decimales queda: $a = 3'1452$.

Ejemplo 3.2. Redondear los siguientes números con tres cifras decimales: $A_1 = 12'7852$, $A_2 = 394'261$, $A_3 = 6'265001$, $A_4 = 147'5$, $A_5 = 148'35$.

1. $a_1 = 12'8$
2. $a_2 = 394$
3. $a_3 = 6'27$
4. $a_4 = 148$
5. $a_5 = 148$

4. Error absoluto

El valor absoluto de la diferencia entre el número exacto A y su aproximado a es el *error absoluto* cometido $|A - a|$.

En general, es imposible determinar el valor del error absoluto $|A - a|$ e incluso su signo ya que el número exacto A es desconocido. Por consiguiente, utilizamos *cotas superiores* del valor absoluto del error absoluto.

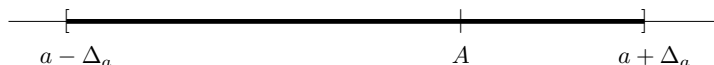
Si el error absoluto es menor que Δ_a , se dice que Δ_a es una cota de error absoluto y se tiene

$$|A - a| \leq \Delta_a. \quad (1)$$

El error absoluto es una cota superior de la desviación del número exacto A de su aproximación:

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a. \quad (2)$$

Gráficamente:



La desigualdad (2) se escribe a menudo en la forma

$$A = a \pm \Delta_a. \quad (3)$$

Ejemplo 4.1. Se sabe que $\pi = 3'14159265 \dots$ entonces si tomamos $a = 3'1416$ como valor aproximado de π el error que estamos cometiendo es

$$|\pi - 3'1416| = 0'00000735 \dots < 0'000008 < 0'00001 = 10^{-5}$$

en este caso podemos afirmar que $3'1416$ es un valor aproximado de π con un error menor que $0'000008$ o bien menor que una cienmilésima. Esto es, podemos tomar como error absoluto $0'000008$ o también podemos tomar $0'00001$.

El error absoluto no debe expresarse nunca con más de dos cifras

Por convenio, el error absoluto se expresará con dos cifras si la primera es un 1, o, si siendo un 2, no llega a 5 la segunda.

INCORRECTO	CORRECTO
$5'619 \pm 0'126$	$5'62 \pm 0'13$
$8'4 \pm 0,06$	$8'40 \pm 0'06$
$345'233 \pm 0'18$	$345'23 \pm 0'18$
$2'023 \pm 0'0261$	$2'02 \pm 0'03$

En los demás casos, el error absoluto deberá expresarse con una sola cifra obtenida mediante redondeo.

5. Error relativo

El error relativo de un número aproximado a es la cantidad δ_a que satisface la desigualdad

$$\left| \frac{A - a}{a} \right| \leq \delta_a, \quad a \neq 0. \quad (4)$$

En particular se admite

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad a \neq 0 \quad (5)$$

Ejemplo 5.1. Un número A está en el intervalo $[23'07, 23'10]$. Encontrar un valor aproximado, el error absoluto y el relativo de dicho valor.

Supongamos que elegimos el punto medio del intervalo como valor aproximado: $a = 23'085$. El error absoluto es la mitad de la longitud del intervalo: $\Delta_a = 0'015$. El error relativo lo tomamos como $\delta_a = \Delta_a/a = 0'000604 \dots$. Es usual redondear el valor del error a uno o dos dígitos no nulos. Por consiguiente ponemos $\delta_a = 0'07\%$. $\square$

Ejemplo 5.2. Determinar, en tanto por ciento, el error relativo del número aproximado $a = 35'1480$ si $A = 35'1480 \pm 0'0007$.

Utilizando la fórmula (5), se tiene

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a} = \frac{0'0007}{35'1480} = 0'00002 = 0,002\%$$

$\square$

Ejemplo 5.3. Determinar el error absoluto del número aproximado $a = 4'123$ si $\delta_a = 0'01\%$.

$$\Delta_a = |a| \cdot \delta_a = 4'123 \cdot 0'0001 \leq 0'0005,$$

$$A = 4'1230 \pm 0'0005.$$

□

6. Cifras significativas

Todo número decimal positivo, tanto exacto como aproximado, puede ser representado como

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$$

El dígito α_n del número aproximado a es una *cifra significativa* si es válida la desigualdad

$$|A - a| \leq 0'5 \cdot 10^{m-n+1} \quad (6)$$

esto es, si

$$\Delta_a \leq 0'5 \cdot 10^{m-n+1} \quad (7)$$

6.1. Observaciones

Lea desde la izquierda y comience a contar las cifras significativas cuando encuentre el primer dígito distinto de cero.

1. **Todos los números distintos de cero son significativos (lo que significa que cuentan como cifras significativas)**

613 tiene tres cifras significativas

123456 tiene seis cifras significativas

2. **Los ceros ubicados entre dígitos distintos de cero son significativos (cuentan)**

5004 tiene cuatro cifras significativas

602 tiene tres cifras significativas

6000000000000002 itiene 16 cifras significativas!

3. Los ceros finales (los que están al final) son significativos solo si el número contiene un punto decimal; de otra manera son insignificantes (no cuentan)

5'640 tiene cuatro cifras significativas

120000' tiene seis cifras significativas

120000 tiene dos cifras significativas salvo que reciba información adicional sobre el problema

4. Los ceros a la izquierda del primer dígito distinto de cero son insignificantes (no cuentan); son solo marcadores de posición!

0'000456 tiene tres cifras significativas

0'052 tiene dos cifras significativas

0'000000000000000000000000000000052 también tiene dos cifras significativas!

Ejemplo 6.1. El número $a = 23'071937$ contiene cinco cifras significativas. Encontrar su error absoluto.

Haciendo uso de la fórmula (6) para $m = 1$, $n = 5$ se tiene $\Delta_a = 0'5 \cdot 10^{1-5+1} = 0'0005$ es el error absoluto. $\square$

Ejemplo 6.2. ¿Cuál es el error relativo del número aproximado $a = 4'176$ si todas sus cifras son significativas?

En este caso $n = 4$ y $m = 0$. Con lo cual $\Delta_a = 0'5 \cdot 10^{0-4+1} = 0,5 \cdot 10^{-3}$

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0'0005}{4'176} = 0,0001197 < 0'00012 = 0'012 \%$$

$\square$

Ejemplo 6.3. ¿Cuántas cifras decimales deben tomarse en $\sqrt{18}$ para que el error relativo no exceda del 0'1 %?

$$\sqrt{18} = 4'2426406 \dots$$

$$\delta_a = 0'1 \% = 0'001.$$

$$\Delta_a = 4'2426406 \dots \times 0'001 = 0'004242 \dots < 0'005$$

$$= 0'5 \cdot 10^{-2} \leq 0'5 \cdot 10^{0-n+1}$$

$$\text{Entonces } 1 - n = 2 \Rightarrow n = 3. \text{ Es decir } \sqrt{18} = 4'243 \pm 0,005$$

$\square$

7. Error de una suma y de una diferencia

Las propiedades se verifican para el error absoluto y son :

$$\Delta_{A+B} \leq \Delta_A + \Delta_B$$

$$\Delta_{A-B} \leq \Delta_A + \Delta_B$$

Para el error relativo:

$$\delta_{A+B} = \frac{\Delta_{A+B}}{A+B} \leq \frac{\Delta_A + \Delta_B}{A+B}$$

$$\delta_{A-B} = \frac{\Delta_{A-B}}{A-B} \leq \frac{\Delta_A + \Delta_B}{A-B}$$

8. Error de un producto y de un cociente

Las propiedades se verifican para el error relativo y son:

Producto

$$\delta_{A \cdot B} = \delta_A + \delta_B$$

Cociente

$$\delta_{A/B} = \delta_A + \delta_B$$

Ejemplo 8.1. Determinar el resultado del producto $1'24 \times 0'6554$ con todas sus cifras significativas si ambos números tienen todas sus cifras significativas.

En primer lugar, $1'24 \times 0'6554 = 0'812696$

Por otra parte, si $a = 1'24 \times 0'6554$, $a_1 = 1'24$ y $a_2 = 0'6554$, tenemos:

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} = \frac{0'005}{1'24} + \frac{0'00005}{0'6554} = 0'00403 + 0'000000762 = 0'004106$$

Con esto, $\Delta_a = 0'812696 \times 0'004106 = 0'00336$

Ahora determinamos el número de cifras significativas de a :

$$\Delta_a = 0'00336 \leq 0'5 \cdot 10^{-1-n+1}$$

lo cual se verifica si $n = 2$, por consiguiente el resultado con sus cifras significativas es $a = 0'81$ $\square$

Ejemplo 8.2. Determinar el resultado del cociente $1'29 \div 0'7954$ con todas sus cifras significativas si ambos números tienen todas sus cifras significativas.

En primer lugar, $1'29 \div 0'7954 = 1'621825$

Por otra parte, si $a = 1'29 \times 0'7954$, $a_1 = 1'29$ y $a_2 = 0'7954$, tenemos:

$$\begin{aligned}\delta_a &= \delta_{a_1} + \delta_{a_2} = \frac{0'005}{1'29} + \frac{0'00005}{0'7954} \\ &= 0'003875 + 0'000006286 = 0'003881286\end{aligned}$$

Con esto, $\Delta_a = 1'621825 \times 0'003881286 = 0'006294766$

Ahora determinamos el número de cifras significativas de a : $\Delta_a = 0'006294766 \leq 0'5 \cdot 10^{0-n+1}$ lo cual se verifica si $n = 2$, por consiguiente el resultado con sus (dos) cifras significativas es $a = 1'6$ $\square$

9. Error de una potencia y de una raíz

Las propiedades se verifican para el error relativo y son:

Potencia

$$\delta_{A^n} = n\delta_A$$

Raíz

$$\delta_{\sqrt[n]{A}} = \frac{1}{n}\delta_A$$

Ejemplo 9.1. El lado de un cuadrado es $a = 36'5$ cm (con una precisión de 1 mm). Encontrar el área del cuadrado, el error absoluto y el relativo así como el número de cifras significativas del resultado.

(1) Calculamos el área del cuadrado:

$$s = a^2 = 36'5^2 = 1332'2 \cong 1'33 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$$

(2) Buscamos el error relativo del área:

$$\delta_s = 2\delta_a = 2 \cdot \frac{0'1}{36'5} \cong 0'0055 = 55\%.$$

(3) Ahora buscamos el error absoluto del área:

$$\Delta_s = s\delta_s = 1'33 \cdot 10^3 \cdot 0'0055 \cong 7'4 \text{ cm}^2.$$

Ahora determinamos el número de cifras significativas de s : $\Delta_s = 7'4 \leq 0'5 \cdot 10^{3-n+1}$ lo cual se verifica si $n = 2$, por consiguiente el resultado con sus (dos) cifras significativas es $s = 1'3 \text{ cm}^2$. $\square$

Ejemplo 9.2. Encontrar con qué error relativo y con cuántas cifras significativas podemos calcular el lado de un cuadrado si su área es $s = 16'45 \text{ cm}^2$ con un error de $0'01$.

Se tiene $a = \sqrt{s} = 4'056 \text{ cm}$;

$$\delta_a = \frac{1}{2}\delta_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{0'01}{16'45} = 0'0003 = 0'03 \%;$$

$$\Delta_a = 4'056 \cdot 0'0003 = 1'3 \cdot 10^{-3}.$$

Con esto se tiene

$$1'3 \cdot 10^{-3} = 0'0013 \leq 0'005 = 0'5 \cdot 10^{-2}$$

por consiguiente $0 - n + 1 = -2 \Rightarrow n = 3$. Tiene 3 cifras significativas. $\square$

Ejemplo 9.3. Obtener el número de cifras significativas de la siguiente operación sabiendo que cada uno de los números que aparecen en su expresión tiene todas sus cifras significativas.

$$Y = \sqrt[5]{\frac{1'000 - 0'0005}{2'0000 + 0'005}}$$

- $Y = 0'8700289107313 \dots$
- $a = 1'000 \Rightarrow \Delta_a = 0'0005$
- $b = 0'0005 \Rightarrow \Delta_b = 0'00005$
- $c = 2'0000 \Rightarrow \Delta_c = 0'00005$
- $d = 0'005 \Rightarrow \Delta_d = 0'0005$

$$\delta_Y = \frac{1}{5} (\delta_{a-b} + \delta_{c+d})$$

$$\delta_{a-b} = \frac{\Delta_{a-b}}{a-b} = \frac{0'0005 + 0'00005}{1'000 - 0'0005} = 0'00055$$

$$\delta_{c+d} = \frac{\Delta_{c+d}}{c+d} = \frac{0'00005 + 0'0005}{2'0000 + 0'005} = 0'0002743$$

- $\delta_Y = \frac{1}{5} (0'00055 + 0'0002743) = 0'000165$
- $\Delta_Y = 0'00014355470271 < 0'0005 = 0'5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow -3 = -1 - n + 1$
 $\Rightarrow n = 3$ cifras significativas

0'870:0289107313
0'000:5

□

Referencias

- [1] N.I. Danilina, *Computational mathematics*, Editorial MIR, Moscow, 1988.
- [2] Open Course Ware ULL, <https://campusvirtual.ull.es/ocw/course/view.php?id=78>