

Cálculo diferencial

Aplicaciones de la derivada: razón de cambio

máximos y mínimos

1. Introducción

El concepto de derivada es fundamental en cualquier ámbito de la Matemática Aplicada y es especialmente útil en todas las situaciones en las cuales hay magnitudes que varían respecto a otras de las cuales dependen. Más concretamente, la derivada mide la tasa de cambio de una función con respecto a una variable.

2. Función derivable en un punto

Dada una función $y = f(x)$ la tasa de variación media de y con respecto a x en un intervalo $[a, b]$ es

$$\text{Tasa de variación media} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de variación instantánea de la misma función en un punto a se mide a través de la derivada.

Se dice que la función f es derivable en el punto a si existe el

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

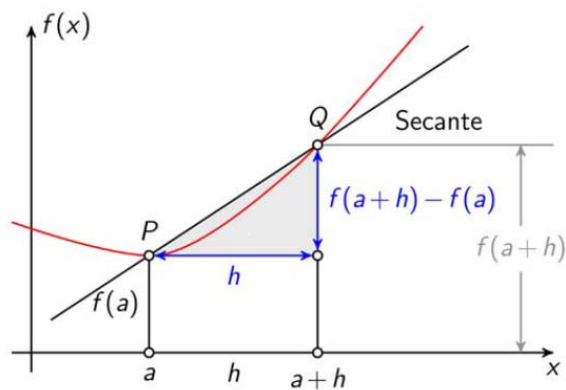
Notación:

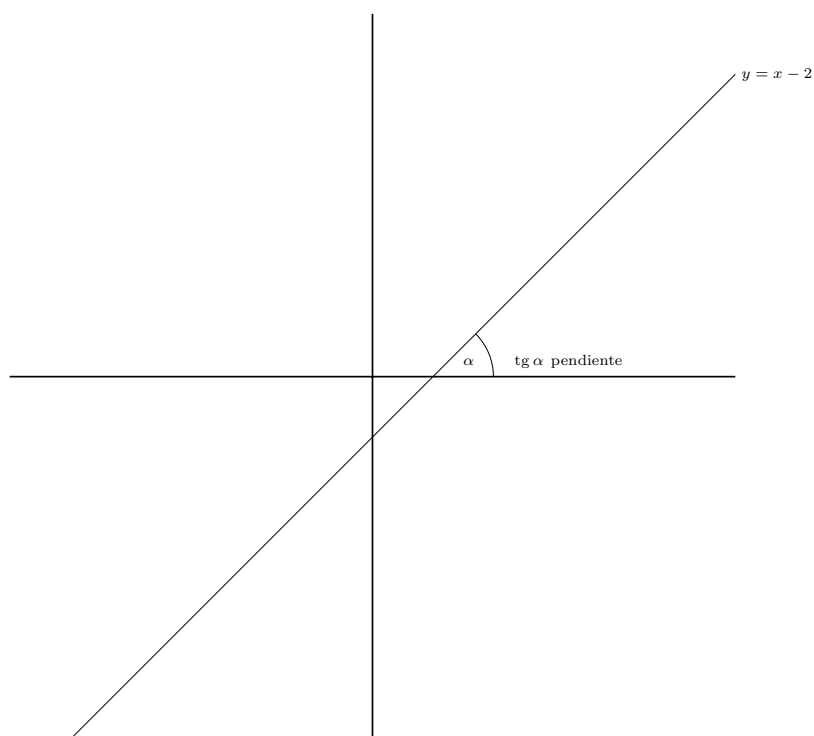
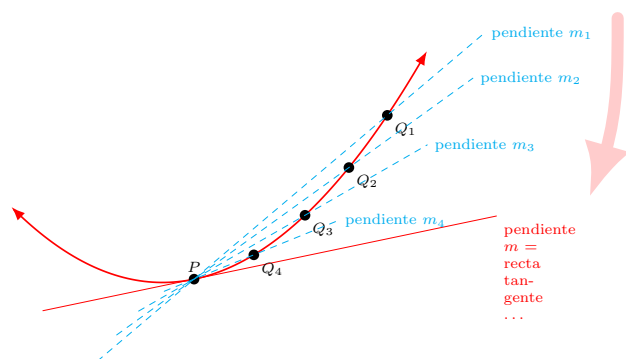
$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} = y'(a) = \frac{dy}{dx}(a).$$

Observemos el significado geométrico del concepto de derivada de una función en un punto.

Como ya hemos comentado al inicio de este tema la derivada de una función en un punto es el

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

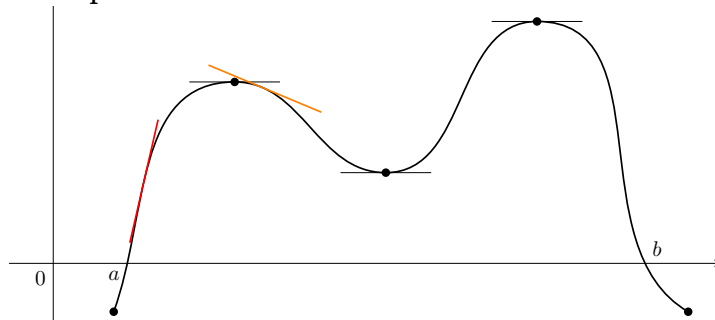




Como podemos observar, la derivada de una función en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto considerado. Dicho de otro modo: la derivada es un número que representa la tangente del ángulo que forma con el eje horizontal la recta tangente a la curva en el punto considerado.

En la siguiente figura se observa la posición de la recta tangente en

distintos puntos de una curva:



Por otra parte, como vemos en la definición, la derivada mide la variación instantánea de una función respecto a su variable en un punto, ya que viene definida como el límite de la tasa de variación media en un intervalo cuya longitud tiende a cero.

Veamos un ejemplo:

La temperatura de una persona durante una enfermedad viene dada a través de la función

$$T = -0'01t^2 - 0'2t + 39'2$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas y T es la temperatura en grados centígrados. Encontrar la tasa de variación media de T en el intervalo $[1, 3]$ en $[1'5, 2]$ así como la tasa de variación instantánea cuando $t = 2$.

Según hemos visto en la definición, la tasa de variación media en el intervalo $[1, 3]$ viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{T(3) - T(1)}{3 - 1} &= \frac{-0'01 \cdot 9 - 0'2 \cdot 3 + 39'2 + 0'01 + 0'2 - 39'2}{3 - 1} \\ &= \frac{-0'48}{2} = -0'24^\circ, \end{aligned}$$

en el intervalo $[1'5, 2]$ se tendría

$$\begin{aligned} \frac{T(2) - T(1'5)}{2 - 1'5} &= \frac{-0'01 \cdot 2^2 - 0'2 \cdot 2 + 39'2 + 0'01 \cdot 1'5^2 + 0'2 \cdot 1'5 - 39'2}{2'5 - 1'5} \\ &= -0'235^\circ. \end{aligned}$$

El significado del último número es que entre la primera hora y media y las dos horas la temperatura *baja* a razón de $0'235^\circ$ grados por hora, de media. El signo negativo nos indica a la variación de la temperatura respecto al tiempo está disminuyendo.

La variación instantánea para $t = 2$ es la derivada de la temperatura en $t = 2$.

$T' = -0,02t - 0,2$ y para $t = 2$ se tendría $T = -0,24^\circ$.

Este último número, $-0,24^\circ$ es la rapidez con la que está variando la temperatura al cabo de dos horas. Es decir, en ese momento la temperatura baja a razón de $0,24^\circ$ por hora.

Como hemos visto hasta ahora la derivada de una función en un punto es un número real que representa la variación instantánea de la función en ese punto.

3. La diferencial

Dada la función $y = f(x)$ se define:

- dx , leído *diferencial de x* , por la relación $dx = \Delta x$.
- dy leído *diferencial de y* , por la relación $dy = f'(x)dx$.

Por ejemplo, si $y = x^3$ se tiene que $dy = 3x^2dx$.

A veces, se denota la derivada de una función por $\frac{dy}{dx}$.

Como hemos visto la derivada de una función en un punto a se define como

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

por consiguiente, para valores de Δx próximos a cero se tiene que

$$f'(a) \approx \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

lo cual podemos entender como

$$f'(a)\Delta x \approx f(a + \Delta x) - f(a), \quad f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x,$$

si nos fijamos en el último término $f'(a)\Delta x$, se puede escribir en la forma $f'(a)dx$ puesto que hemos empezado afirmando que $dx = \Delta x$ y por este motivo se dice que la diferencial de una función es una buena aproximación de la variación de la función.

Nótese que hemos puesto Δx y no Δa porque a es un punto concreto y no hay variación de a sino variación de x que es la variable de la función f .

Todo lo expuesto anteriormente tiene una fundamentación rigurosa que supera los objetivos de este curso.

Veamos un ejemplo: *Determinar aproximadamente la variación del volumen de un cubo de arista 5 cm si ésta se incrementa un 1 %.*

Si un cubo tiene arista x su volumen es $V(x) = x^3$. Pretendemos calcular aproximadamente $V(5 + 0'05) - V(5)$, la variación de V . Según lo visto anteriormente como $V'(x) = 3x^2$:

$$V(5 + 0'05) - V(5) \approx V'(5) \cdot 0'05 = 3 \cdot 5^2 \cdot 0'05 = +75 \cdot 0'05 = 3'75.$$

El valor exacto de dicha variación sería (calculadora)

$$V(5'05) - V(5) = 5'05^3 - 5^3 = 3'787625$$

la cual nos muestra que 3'75, el valor obtenido mediante la diferencial, es una buena aproximación de la variación de V , con un error absoluto de

$$3'787625 - 3'75 = 0'037625 < 0,05.$$

4. Función derivada

Si una función f está definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y en un subconjunto D de A la función f es derivable, se puede definir una nueva función en el conjunto D , que denotamos por f' de forma que a cada punto x de D le asignamos el valor $f'(x)$. Esta función así definida recibe el nombre de función derivada de f .

En este sentido conocemos las derivadas de varias funciones elementales:

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$, función constante ($c \in \mathbb{R}$).
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, función potencial. (n puede ser cualquier número real).
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$, función exponencial. La base es el número e .
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$, función exponencial con cualquier base. ($a > 0$, $a \neq 1$).

- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$, función logaritmo neperiano (base el número e).
- $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$, función trigonométrica.
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$, función trigonométrica.
- $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ función trigonométrica inversa.
- $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ función trigonométrica inversa.

4.1. Algunas propiedades del cálculo de derivadas

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$, linealidad ($k \in \mathbb{R}$).
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4.2. Regla de la cadena - Derivada de una función compuesta

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$y = f(u), \quad u = g(x) \Rightarrow y' = f'(u)u'$$

Ejemplo 1

$$y = \cos(4x), \text{ entonces } y' = -(\operatorname{sen} 4x)4 = -4\operatorname{sen} 4x.$$

Ejemplo 2

$$y = e^{-x}, \text{ entonces } y' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$$

Ejemplo 3

$$y = \operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2, \text{ entonces } y' = 2\operatorname{sen} x \cos x. \text{ Nótese que aquí } f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 4

$$y = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}, \text{ entonces } y' = \frac{1}{2} (\ln x)^{-1/2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Ejemplo 5

$$\begin{aligned} y = \arcsen\left(\frac{x}{2}\right), \text{ entonces } y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

$$y = \operatorname{arc\,tg} 3x, \text{ entonces}$$

$$y' = \frac{1}{1 + 9x^2} \cdot 3 = \frac{3}{1 + 9x^2}$$

5. Derivadas de orden superior

Si f' es la derivada de cierta función f en un determinado conjunto y a su vez existe la derivada de f' para ciertos valores de x entonces podemos definir la función derivada de f' que denotaremos por f'' y que recibe el nombre de *derivada segunda* de f . De la misma forma podemos mencionar a las derivadas tercera, cuarta, etc.

Ejemplo

Dada la función $y = f(x) = \cos x$ determinar sus cinco primeras derivadas.

$$\text{Se tiene que } y' = -\operatorname{sen} x; y'' = -\cos x; y''' = \operatorname{sen} x; y^{iv} = \cos x.$$

6. Extremos relativos

Con el fin de abordar el estudio de los extremos (máximos y mínimos) de una función de una variable haremos uso de las propiedades de la derivada de una función.

Se dice que una función f es creciente en un intervalo (a, b) si dados dos puntos $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) < f(x_2)$. Gráficamente esto significa que

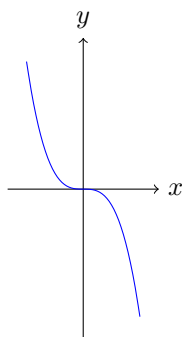
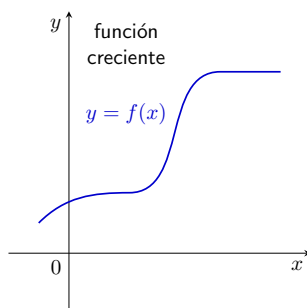


Figura 1: Máximos y mínimos relativos



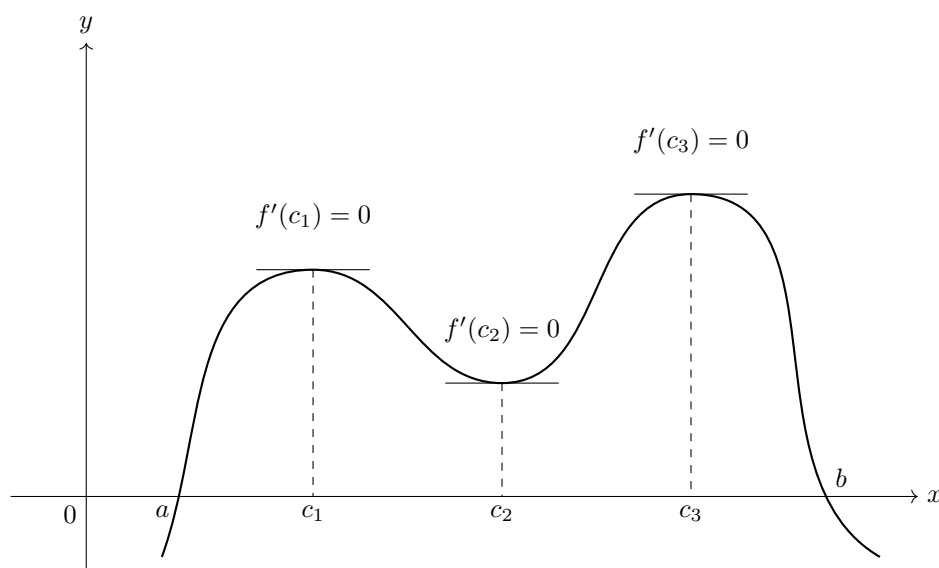
Si nos fijamos en la gráfica anterior, si una función es creciente su derivada es positiva. Por consiguiente en aquellos intervalos en los que se tenga $f'(x) > 0$ la función es creciente.

Análogamente, una función f es decreciente en un intervalo (a, b) si dados dos puntos $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) > f(x_2)$. Gráficamente esto significa que

Si nos fijamos en la gráfica anterior, si una función es decreciente su derivada es negativa. Por consiguiente en aquellos intervalos en los que se tenga $f'(x) < 0$ la función es decreciente.

Ahora vamos a tratar con los extremos (máximos y mínimos) de una función. Nos vamos a limitar a tratar con funciones derivables que son las que generalmente se presentan en las aplicaciones que estudiaremos.

La función f tiene un máximo relativo en un punto c si existe un intervalo (a, b) que contenga al punto c de modo que $\forall x \in (a, b)$ se tiene que $f(x) \leq f(c)$. Por consiguiente, para los valores de $x \in (a, c)$ la función es creciente y si $x \in (c, b)$ la función es decreciente.



La función f tiene un mínimo relativo en un punto c si existe un intervalo (a, b) que contenga al punto c de modo que $\forall x \in (a, b)$ se tiene que $f(x) \geq f(c)$. Por consiguiente, para los valores de $x \in (a, c)$ la función es decreciente y si $x \in (c, b)$ la función es creciente.

En definitiva se tiene la siguiente situación:

Se observa que en los puntos en los cuales la función f presenta un máximo o mínimo relativo la derivada de f se anula. Son puntos en los que la recta tangente es horizontal. Se tiene así que para encontrar los extremos relativos de una función hay que buscar los puntos en los que se tiene $f'(x) = 0$. Sin embargo esta condición no es suficiente: ver figura 1 de la página anterior.

Para asegurarnos de que la función tiene un máximo o un mínimo en un punto c tenemos que estudiar si la función crece o decrece en el intervalo (a, b) . Sin embargo existe una condición que nos puede evitar estudiar el signo de la derivada de la función cerca del punto c en el cual se anula. Se trata del signo de la derivada segunda en el punto c . Se tiene la siguiente propiedad:

Si $f'(c) = 0$ entonces

- Si $f''(c) < 0$ la función f tiene un máximo relativo en $x = c$.
- Si $f''(c) > 0$ la función f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

Si $f'' = 0$ no podemos asegurar nada. Sin embargo en este caso nos puede resolver la situación el estudio del signo de la derivada primera en un entorno del punto c .

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x^2$. Se trata de determinar sus extremos relativos.

$f'(x) = 2x$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ Esto nos indica que en el punto $x = 0$ hay un posible máximo o mínimo de la función f . Ahora bien, $f''(x) = 2 \Rightarrow f''(0) = 2 > 0$. Por consiguiente la función f tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Ejemplo 2

Sea $f(x) = 1 - x^2$. Se trata de determinar sus extremos relativos.

$f'(x) = -2x$. $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ Esto nos indica que en el punto $x = 0$ hay un posible máximo o mínimo de la función f . Ahora bien, $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(0) = -2 < 0$. Por consiguiente la función f tiene un máximo relativo en $x = 0$.

Ejemplo 3

Sea $f(x) = -x^3$. Se trata de determinar sus extremos relativos.

$f'(x) = -3x^2$. $f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ Esto nos indica que en el punto $x = 0$ hay un posible máximo o mínimo de la función f . Ahora bien, $f''(x) = -6x \Rightarrow f''(0) = 0$. Por consiguiente no sabemos lo que le ocurre a la función f en $x = 0$. Sin embargo, si observamos la derivada primera de f se tiene $f'(x) = -3x^2$ la cual es negativa salvo para $x = 0$ de lo que se deduce que la función f es decreciente en todo $\mathbb{R}$. Por tanto en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo.

Ejemplo 4

Sea $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$. Se trata de determinar sus extremos relativos.

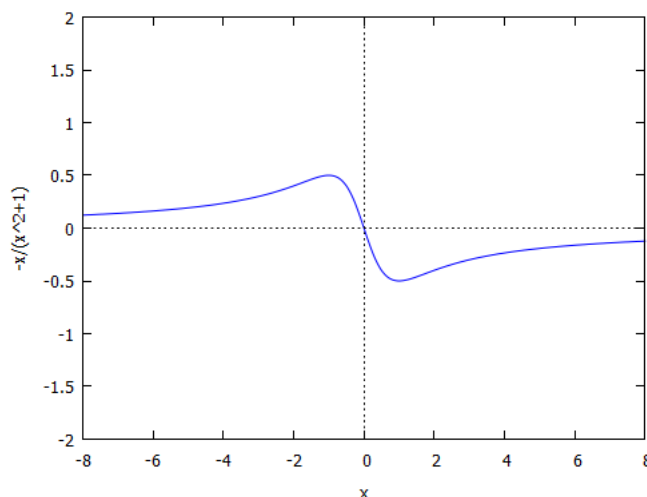
$$f'(x) = \frac{-(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Esto nos indica que en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ hay posibles máximos o mínimos de la función f . Veamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{6x - 2x^3}{(x^2 + 1)^3}, \quad f''(1) = \frac{4}{8} > 0, \quad f''(-1) = \frac{-4}{8} < 0$$

De lo que sigue que la función presenta un mínimo en $x = 1$ y un máximo en $x = -1$.

Se llega a la misma conclusión tomando en consideración el signo de la derivada f' , el cual depende del signo del numerador $x^2 - 1$ puesto que el denominador $(x^2 + 1)^2$ es siempre positivo. Basta observar que si $x < -1$ (por ejemplo $x = -1.1$) se tiene $x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$, es decir, la función es creciente a la izquierda de $x = -1$. Si $x > -1$ (por ejemplo $x = -0.9$) se tiene $x^2 - 1 < 0$, es decir, la función es decreciente a la derecha de $x = -1$ de lo que se deduce que en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo. En los alrededores de $x = 1$ ocurre algo similar: si $x < 1$ (por ejemplo $x = 0.9$) se tiene que $x^2 - 1 < 0$ y la función es decreciente. Si $x > 1$ (por ejemplo $x = 1.1$) se tiene que $x^2 - 1 > 0$ y la función es creciente, de lo que se deduce que en $x = 1$ la función f tiene un mínimo relativo.



Ejemplo 5

Sea $f(x) = 10x^4$. Se trata de determinar sus extremos relativos.

$f'(x) = 40x^3$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 40x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ Esto nos indica que en el punto $x = 0$ hay un posible máximo o mínimo de la función f . Ahora bien, $f''(x) = 0$ Por consiguiente no sabemos lo que le ocurre a la función f en $x = 0$. Sin embargo $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$. Es decir, la función decrece a la izquierda de $x = 0$ y crece a la derecha, se deduce que en $x = 0$ la función presenta un mínimo.

Una vez estudiados los ejemplos anteriores es importante distinguir entre el signo de la derivada primera y el signo de la derivada segunda. El signo de la derivada primera nos indica que la función es creciente si $f' > 0$ o decreciente si $f' < 0$. En cambio, el signo de la derivada segunda nos indica si la función posee un máximo $f'' < 0$ o un mínimo si $f'' > 0$ pero siempre que estemos en un punto $x = c$ en el cual $f'(c) = 0$.

7. Aplicaciones de la derivada

Existe una gran cantidad de aplicaciones de la derivada. En este apartado abordaremos una de gran interés: la determinación de los extremos de algunas funciones que permiten resolver ciertos problemas denominados de optimización.

Cuando tratamos de resolver un problema de los denominados de *optimización* hacemos uso de ciertas funciones y de relaciones entre las variables que intervienen en las mismas con la finalidad de obtener una función de una variable cuyos valores extremos permiten obtener las condiciones que resuelven el problema.

La principal dificultad que se presenta a la hora resolver un problema de optimización es que no existe un método o técnica de carácter general que se pueda aplicar a cualquier planteamiento. Existen unas líneas generales de actuación pero cada caso tiene sus propias características. Veamos algunas de ellas:

En primer lugar debemos identificar la variable para la cual se pretende obtener un valor máximo o mínimo.

Esta variable estará relacionada con otros datos aportados por el enunciado del problema, el cual es necesario leer varias veces para entender qué nos piden y qué conocemos. Es conveniente escribir una primera ecuación para la variable a optimizar. Un gráfico puede ser de gran ayuda en este punto.

A partir del enunciado debemos establecer las relaciones matemáticas que existen entre los datos que conocemos y algunas variables que es preciso introducir con el fin de expresar en lenguaje de ecuaciones y funciones las condiciones especificadas en el enunciado.

A continuación es preciso relacionar los datos conocidos con la variable a optimizar a mediante una función de una variable. El estudio de la

derivada de esta función nos permite determinar el valor o valores de la variable para el cual la función alcanza su máximo o mínimo.

Con los valores obtenidos calculamos el resto de datos que nos demanda el enunciado.

Es importante determinar el dominio de variabilidad adecuado a las condiciones del problema. Es decir, identificar los valores de las variables para los cuales el problema tiene sentido: la longitud no puede ser negativa, igual que el tiempo o el volumen, etc.

En la mayoría de los problemas que nos encontremos, la función a maximizar o minimizar dependerá de dos variables, por tanto la condición del enunciado nos permitirá relacionar estas dos variables para poner una en función de la otra.

Es conveniente asignar símbolos (letras, variables) a todas las cantidades dadas así como a las cantidades a determinar.

7.1. Extremos absolutos en un intervalo cerrado $[a, b]$

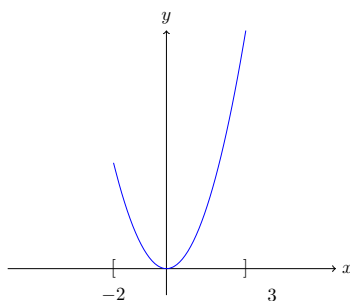
Si f es derivable en $[a, b]$ sus extremos absolutos en dicho intervalos se determinan considerando los puntos:

- $f'(x) = 0$.
- $f(a)$ y $f(b)$.

En el mayor valor que toma la función en los puntos considerados anteriormente se encuentra el máximo absoluto y en el menor el mínimo absoluto.

Ejemplo:

Extremos absolutos de $f(x) = x^2$ en $[-2, 3]$.



$f'(x) = 2x$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Por consiguiente consideramos los valores:

$$f(0) = 0, \quad f(-2) = 4, \quad f(3) = 9,$$

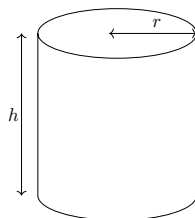
de donde se deduce que la función alcanza el mínimo absoluto en $x = 0$ y el máximo absoluto en $x = 3$. Por tanto, $\forall x \in [-2, 3]$ se tiene

$$f(0) = 0 \leq f(x) \leq 9 = f(3).$$

7.2. Algunos ejemplos

Ejemplo 1

Determinar las dimensiones de una lata de refresco de 330 cc de volumen de manera que la cantidad de hojalata utilizada en la superficie sea mínima.

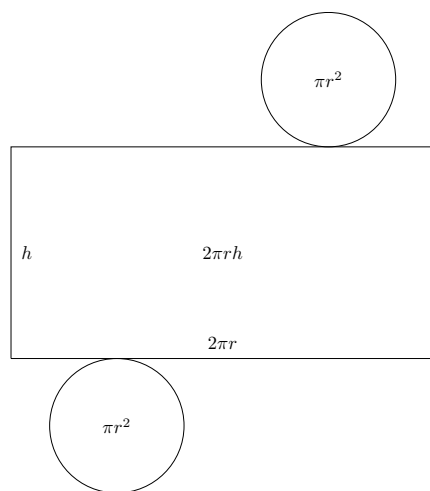


Lo que pretendemos optimizar es la superficie de hojalata necesaria para construir la lata.

El primer dato que aparece en el enunciado es el volumen de la lata: 330 cc. Es decir $V = 330$ cc.

En segundo lugar, nos informan que la forma es cilíndrica y sabemos que el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h su altura. De ahí que podamos afirmar que $330 = \pi r^2 h$.

Nos habla de la cantidad de hojalata utilizada en su fabricación. Esto se refiere a una superficie. El área total del cilindro, la cual se compone de las dos tapas (superior e inferior), las cuales son dos círculos cuyo radio es igual al del cilindro. La superficie de cada tapa es πr^2 . Además tenemos que contar el área lateral que desarrollada es un rectángulo:



La superficie total es la suma de las áreas de los dos círculos más la del rectángulo:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Tenemos así que la superficie es una función de dos variables: el radio y el volumen.

Ahora hacemos uso de las condiciones del problema: el volumen es $330 = \pi r^2 h$. Aquí podemos despejar h y queda:

$$h = \frac{330}{\pi r^2} \Rightarrow S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$$

Esta es la función en la que S solo depende de una variable h . Hay que encontrar el valor de r para el cual la función alcanza su máximo. Para ello vamos a derivar:

$$S' = 4\pi r - \frac{660}{r^2}$$

Los posibles extremos son los valores de r para los cuales $S' = 0$

$$s' = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{660}{r^2} \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{660}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{660}{4\pi}$$

Es decir

$$r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} = 2^{-1/3} \pi^{-1/3} 330^{-1/3},$$

$$h = \frac{330}{\pi r^2} = \frac{330}{\pi} \left(\frac{330}{2\pi} \right)^{-2/3} = 2^{2/3} \pi^{-1/3} 330^{-1/3}.$$

Obsérvese que $h = 2r$.

Ejemplo 2

Estás en un barco a 2 millas del punto A más cercano de la costa. Debes ir al punto Q situado a 3 millas de A por la costa. Puede remar a una velocidad de 3 millas por hora y puede caminar a una velocidad de 5 millas por hora. ¿Hacia qué punto de la costa debes remar para llegar al punto Q en el menor tiempo posible?

Si analizamos el enunciado observamos que nos preguntan a qué punto de la costa debe llegar remando para continuar caminando hasta el punto Q en el menor tiempo posible. Es decir, tenemos que poner el tiempo en función de otras variables y derivar la función tiempo para encontrar en qué punto alcanza su valor mínimo.

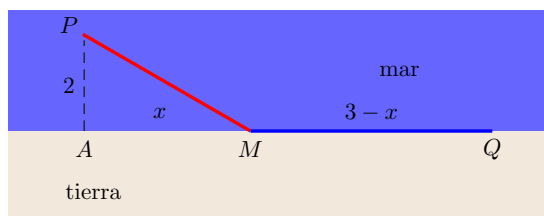
Observamos que el problema nos habla de distancias. En este tipo de problemas suponemos que el movimiento es uniforme y que la velocidad es $v = \frac{e}{t}$ donde e es el espacio recorrido y t el tiempo invertido en recorrerlo.

Es importante notar que nos da dos velocidades: la que alcanza remando y la que alcanza caminando. Con esto podemos plantear que el tiempo total invertido T es la suma del tiempo que emplea remando, digamos t_1 y el tiempo que emplea caminando t_2 . Se tiene así que la velocidad remando es de 2 mil/hora y la velocidad caminando es de 4 mil/hora, con lo cual:

$$3 = \frac{\text{distancia recorrida por mar}}{t_1}, \quad 5 = \frac{\text{distancia recorrida por tierra}}{t_2}$$

$$T = t_1 + t_2$$

En este tipo de problemas es muy conveniente hacer un dibujo o esquema de la situación como el siguiente



Hemos puesto con línea de trazo rojo la distancia que recorre por mar y con una de trazo azul la distancia que recorre por tierra. En el gráfico

hemos denotado por x la distancia del punto A (el más cercano del barco a la costa) al punto M y $3 - x$ es la distancia desde este punto al punto B .

Los dos tramos a recorrer (rojo y azul) representan la hipotenusa de un triángulo rectángulo $\widehat{PAM}$, (el segmento rojo) mide $\sqrt{4 + x^2}$ y el segmento de color azul mide $3 - x$

En resumen, la distancia a recorrer por mar es $\sqrt{4 + x^2}$ y por tierra es $3 - x$ y como el tiempo es el espacio dividido por la velocidad se tiene que:

$$t_1 = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3}, \quad t_2 = \frac{3 - x}{5} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{3 - x}{5}$$

y esta es la función a optimizar. Nuestro objetivo ahora es comprobar si existe algún valor de x para el cual T alcanza un valor mínimo.

Para que el proceso de derivación sea más simple la escribiremos de la siguiente forma:

$$T = \frac{(4 + x^2)^{1/2}}{3} + \frac{3 - x}{5}$$

Ahora aplicamos las reglas generales de derivación se tiene:

$$T' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(4 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x - \frac{1}{5}$$

$$T' = \frac{x}{3(x^2 + 4)^{1/2}} - \frac{1}{5}$$

Ahora igualamos a cero la derivada:

$$T' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3(x^2 + 4)^{1/2}} - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3(x^2 + 4)^{1/2}} = \frac{1}{5}$$

lo cual equivale a

$$5x = 3(x^2 + 4)^{1/2} \Leftrightarrow 25x^2 = 4(4 + x^2) \Leftrightarrow 25x^2 = 36 + 4x^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

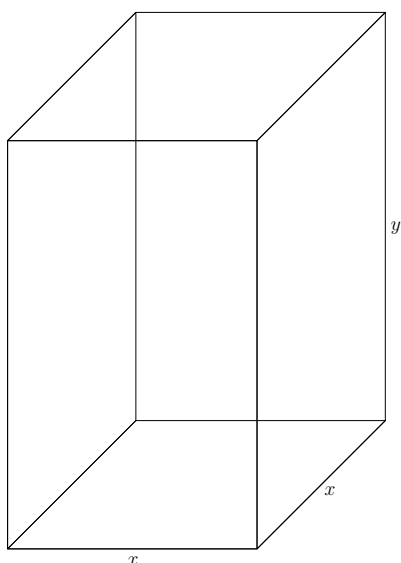
el valor negativo no tiene sentido al tratarse de una longitud y para el positivo consideramos la derivada segunda de T :

$$T'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2}(4 + x^2)^{-3/2} \cdot 2x + \frac{1}{2}(4 + x^2)^{-1/2}$$

Ahora en la derivada segunda se sustituye el valor obtenido de anular la derivada primera, $x = \frac{3}{2}$, y se comprueba que $T'' > 0$ y por tanto T es mínimo para $x = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 3

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para $13,5 m^3$. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.



Para un depósito en forma de prisma de base cuadrada x^2 , altura y , y sin base superior, la superficie de chapa necesaria será 4 caras laterales y una base cuadrada: $A(x, y) = 4xy + x^2$. Esta es la función que tenemos que optimizar. Para relacionar las dos variables usaremos la condición geométrica del volumen: $V(x, y) = x^2y$, así podemos expresar una variable en función de la otra, y obtener la función Área dependiente de una sola variable, $A(x)$, para aplicarle la condición de extremo relativo, $A'(x) = 0$. Pues despejamos por ejemplo la altura y , la sustituimos en la función $A(x, y)$, así ya la podemos derivar:

$$y = \frac{13'5}{x^2} \Rightarrow A(x, y) = 4x \frac{13'5}{x^2} + x^2 = \frac{54}{x} + x^2 = A(x)$$

Ahora derivamos e igualamos la derivada de A a cero y queda

$$A'(x) = -\frac{54}{x^2} + 2x, \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{54}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow 27x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Evalúamos la derivada segunda de A en $x = 3$ y tenemos

$$A''(x) = \frac{108}{x^3} + 2, \quad A''(3) = 6 > 0$$

Luego el mínimo de A se alcanza para $x = 3$ y las dimensiones de la caja son: largo 3 cm, ancho 3 cm y alto 1'5 cm. (nótese que $y = \frac{13'5}{x^2}$).

Ejemplo 4

El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60€ que el propietario aumenta el precio observa que pierde un inquilino. ¿a qué precio le conviene alquilar los pisos para obtener la mayor ganancia posible? (Ayuda: llamar $x = n^\circ$ de 60 € que aumenta o lo que es lo mismo el n° inquilinos perdidos.)

En este caso no podemos realizar ningún gráfico, pero observemos algunas situaciones:

- Si no sube el precio recibe como ganancia $600 \times 40 = 24,000\text{€}$
- Si sube 60€ pierde un inquilino, recibe como ganancia $660 \times 39 = 25,740\text{€}$
- Si sube 600€ pierde 10 inquilinos, recibe como ganancia $1,200 \times 30 = 36,000\text{€}$
- Si sube 1.800€ pierde 30 inquilinos y recibe como ganancia $2,400 \times 10 = 24,000\text{€}$

Tenemos que encontrar la función dependiente del número de múltiplos de 60€, x que sube el precio y que coincide con el número de inquilinos que pierde, la cual describe esta situación y encontrar para qué valor de x alcanza su valor máximo.

A la vista de las distintos casos observados parece adecuado tomar la función $y = (600 + 60x)(40 - x) = 24000 + 1800x - 60x^2$.

Derivando e igualando a cero queda

$$y' = 1800 - 120x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 1800 - 120x = 0 \Leftrightarrow x = 15,$$

la derivada segunda es $y'' = -120$, luego se trata de un máximo. Es decir, sube el precio $60 \times 15 = 900\text{€}$ y pierde 15 inquilinos.