

Funciones reales de varias variables. Derivación parcial. Extremos de funciones de varias variables. Aplicaciones.

Introducción y ejemplos.

Los fenómenos físicos dependen, en general, de una infinidad de variables, de manera tal que la mayoría de las cuales es imposible valorar. Partiendo de esta base, a fin de modelizar matemáticamente dichos fenómenos, nos valemos de simplificaciones, suposiciones, de constantes evaluadas empíricamente, de consideraciones propias de la situación concreta, etc.

En este sentido aparecen las funciones que, en algunos casos, dependen de una variable independiente y en otros dependen de varias variables independientes, con objeto de que el modelo no sea tan excesivamente simple que nos proporcione resultados de utilidad nula.

Consideraremos aquí, fundamentalmente, las funciones de dos y tres variables, siendo el estudio para mayor número de ellas análogo.

De este modo, una función de dos variables x e y es una aplicación de un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, esto es:

$$\begin{array}{rcl} f : & D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow f(x, y) \end{array}$$

Análogamente, en el caso de tres variables, $D \subset \mathbb{R}^3$ y

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow f(x, y, z) \end{aligned}$$

Como notación se suele emplear $z = f(x, y)$ para funciones de dos variables. También se utiliza $z = z(x, y)$, entendiendo, en este caso, que z se usa con dos significados: como variable y como función. Para tres variables podemos escribir $u = f(x, y, z)$.

Por ejemplo, se escribe $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ y también $z = 2x^2 + 3y^2$. Así $f(-1, 2) = 2(-1)^2 + 3(2)^2 = 14$, idénticamente $z(-1, 2) = 14$. Para el punto $(0, -3)$ se tendrá $f(0, -3) = 27$ o bien $z(0, -3) = 27$.

Como ejemplo del caso de funciones de tres variables, si

$$T(x, y, z) = \frac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$$

se tiene que $T(4, 0, 3) = \frac{100}{25} = 4$, $T(10, 100, 10) = \frac{100}{10200} = \frac{1}{102}$.

Llegados a este punto es importante señalar que, por cursos anteriores, conocemos ejemplos de funciones de varias variables. Es el caso de un plano. Como sabemos, la ecuación de un plano, en general, viene dada por $Ax + By + Cz + D = 0$. Si $C \neq 0$ esta ecuación define a z como función de x y de y .

Por ejemplo, si un plano tiene por ecuación

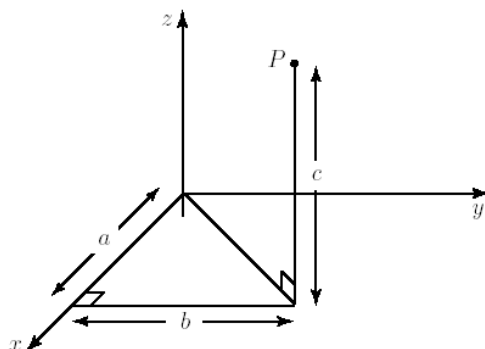
$$2x + 3y - 4z + 2 = 0$$

y despejamos z tenemos que

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$$

que define una función de dos variables. De esta forma, a cada pareja de números reales (x, y) le corresponde el número real z y esta relación hace corresponder a cada punto (x, y) del plano XY un punto (x, y, z) del plano definido por las ecuaciones anteriores el cual tiene como tercera coordenada z .

Representación de un punto P de coordenadas (a, b, c) en el espacio:



Page 1/1

Cálculo Diferencial.

Una de las ideas fundamentales del Cálculo Diferencial es la de *aproximación*, esto es, reemplazar una función dada en el entorno de un punto por una función polinómica de primer grado, de modo que ésta sea la mejor aproximación posible. Las funciones numéricas para las cuales esta aproximación es posible forman la clase de las funciones *diferenciables*.

Derivadas parciales.

El concepto de *función derivable* no se puede extender de una forma sencilla para funciones de varias variables. Aquí se emplea el concepto de *diferencial* de una función en un punto para describir el comportamiento de una función en dicho punto, jugando un papel análogo al de la derivada en el caso de una variable. Para funciones de una variable ser derivable equivale a ser diferenciable. En el caso de varias variables la definición de derivada se restringe al caso de *derivadas parciales*. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un

conjunto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en él y sea $(x_0, y_0) \in D$. Se denominan *derivadas parciales* de f en (x_0, y_0) respecto a x y a y a los siguientes límites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

en el caso de que existan.

Se observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la derivada de f en el sentido de funciones de una variable, manteniendo y fija, en el punto (x_0, y_0) y lo mismo ocurre con $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ manteniendo x fija.

Para funciones de tres variables la definición es análoga.

En algunos libros se utiliza la siguiente notación para las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

La diferencia entre una definición y otra está en que, en la primera se ha particularizado al punto (x_0, y_0) la derivada parcial y en el segundo caso se ha tomado un punto genérico (x, y) . Además, en el segundo caso se ha sustituido h por Δx y k por Δy con el fin de hacer patente que en la derivada parcial hay una *variación*, ya sea de x o de y .

Ejemplo 1

Si $f(x, y) = x^2 \tan(xy)$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \tan(xy) + x^2 \frac{y}{\cos^2(xy)} = 2x \tan(xy) + \frac{x^2 y}{\cos^2(xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\cos^2(xy)}$$

para un punto cualquiera (x, y) del dominio de f . Si, en particular, se nos piden las derivadas parciales en el punto $(0, 0)$ basta con sustituir x e y por las coordenadas de dicho punto como ocurre con las funciones de una variable. En el caso del punto $(0, 0)$ ambas derivadas parciales serían nulas.

Ejemplo 2

Para

$$g(x, y, z) = x^2 e^{\frac{y}{z}}$$

tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 2xe^{\frac{y}{z}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x^2}{z} e^{\frac{y}{z}}, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{x^2 y}{z^2} e^{\frac{y}{z}}.$$

Otra notación.

Para abreviar la escritura de fórmulas en las que intervienen derivadas parciales se suele utilizar la siguiente notación:

- Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales en un punto cualquiera de coordenadas (x, y) se denotan por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = z_x(x, y)$$

o para abreviar, simplemente z_x .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = z_y(x, y)$$

o para abreviar, z_y .

- Si $u = f(x, y, z)$, las derivadas parciales en un punto cualquiera de coordenadas (x, y, z) se denotan por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_x(x, y, z) = u_x(x, y, z)$$

o bien de forma abreviada u_x .

■

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_y(x, y, z) = u_y(x, y, z)$$

■

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_z(x, y, z) = u_z(x, y, z)$$

o abreviando u_y y u_z respectivamente.

Ejemplo 3

Sea $z = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$. Probar que $xz_x + yz_y = 4z$.

Se tiene que

$$z_x = 4Ax^3 + 4Bxy^2, \quad z_y = 4Bx^2y + 4Cy^3.$$

Con lo cual

$$xz_x + yz_y = 4Ax^4 + 4Bx^2y^2 + 4Bx^2y^2 + 4Cy^4 = 4Ax^4 + 8Bx^2y^2 + 4Cy^4 = 4z$$

Las derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$ definen a su vez nuevas

funciones que tienen su propio dominio. En los puntos en los que existan derivadas parciales de las derivadas parciales primeras se definen las *derivadas parciales segundas*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x, y)$$

las cuales, para abreviar, se suelen denotar por

$$z_{xx} \quad z_{xy} \quad z_{yy} \quad z_{yx}$$

respectivamente, o bien por

$$f_{xx} \quad f_{xy} \quad f_{yy} \quad f_{yx}$$

De manera análoga se definen las derivadas parciales de orden superior para funciones de dos variables y para funciones de tres o más variables.

Ejemplo 4

Si $z = e^{xy}$ se tiene:

$$\begin{aligned} z_x &= ye^{xy} \\ z_y &= xe^{xy} \\ z_{xx} &= y^2 e^{xy} \\ z_{xy} &= e^{xy} + xy e^{xy} \\ z_{yy} &= x^2 e^{xy} \\ z_{yx} &= e^{xy} + xy e^{xy} \end{aligned}$$

Ejercicio.

Si $z = e^{-t}(\sin x + \cos y)$ demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

De la misma forma se definen las derivadas parciales de orden superior:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

que también se escribe z_{xxx} .

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)$$

bien z_{xxy} .

Para funciones de tres o más variables el proceso es análogo.

Hemos visto en los ejemplos anteriores que $z_{xy} = z_{yx}$. Pero esto no siempre es así. Esta igualdad es cierta bajo ciertas condiciones en la función en las cuales no entraremos en este curso.

Además, para las derivadas parciales de orden superior, suponiendo válidas las condiciones anteriores sobre la función $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales, se tiene:

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}$$

$$z_{xxyy} = z_{xyxy} = z_{yyxx} = z_{yxyx} = z_{xyyx} = z_{yxyx}$$

Ejemplo 1

Dada la función

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$$

probar que $f_{xz} = f_{zx}$ y que $f_{zzz} = f_{zzx}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} f_x &= ye^x + \ln z \\ f_z &= \frac{x}{z} \end{aligned}$$

De donde sigue que

$$\begin{aligned} f_{xz} &= \frac{1}{z} \\ f_{zx} &= \frac{1}{z} \\ f_{zz} &= -\frac{x}{z^2} \end{aligned}$$

y, finalmente

$$\begin{aligned} f_{xzz} &= -\frac{1}{z^2} \\ f_{zxx} &= -\frac{1}{z^2} \\ f_{zzx} &= -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Si $z = \ln(x^2 + y)$ comprobar que $z_{xy} = z_{yx}$ en los puntos en los que tenga sentido.

En efecto, comenzamos calculando

$$z_x = \frac{2x}{x^2 + y}$$

y, ahora

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 + y} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$$

Por otra parte,

$$z_y = \frac{1}{x^2 + y}$$

y si ahora derivamos respecto a x obtenemos

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$$

Diferencial de una función. Aplicaciones.

Dada una función $z = f(x, y)$ para la cual existen las derivadas parciales en un punto (x_0, y_0) y son continuas, se denomina diferencial de f en dicho punto a la *aplicación lineal* dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \xrightarrow{\quad} & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y \end{array}$$

Ejemplo

Si $z = x^4 - y^3$ su diferencial en el punto $(1, -1)$ es

$$[dz(1, -1)](x, y) = 4x - 3y.$$

En el punto $(-1, 0)$ es

$$[dz(-1, 0)](x, y) = -4x$$

Es importante fijar la idea de que es una *aplicación lineal*.

Diferencial de una función.

Dado que, la diferencial de f en el punto (x_0, y_0) para los valores (h, k) está dada por

$$[df(x_0, y_0)](h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k,$$

de dice que la función f es *diferenciable* en el punto (x_0, y_0) si

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [df(x_0, y_0)](h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

y puesto que, tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ pero el resultado del límite es cero, el numerador está más cerca de cero que $\sqrt{h^2 + k^2}$ cuando (h, k) se aproxima a $(0, 0)$, con lo cual podemos afirmar que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [df(x_0, y_0)](h, k) \approx 0, \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

o lo que es lo mismo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx [df(x_0, y_0)](h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k,$$

si $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, o lo que podemos interpretar como equivalente, si h y k toman valores próximos a cero.

Esta relación pone de manifiesto que **la diferencial de f en el punto (x_0, y_0) es una buena aproximación de**

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

para $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Ejemplos y aplicaciones.

Ejemplo 1

Encontrar la diferencial de la función $f(x, y) = xe^{xy}$ en el punto $(1, 0)$ y calcular aproximadamente $f(1.1, -0.1)$.

Solución:

Sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} f_x &= e^{xy} + xy e^{xy} \\ f_y &= x^2 e^{xy} \end{aligned}$$

En el punto $(1, 0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f_x(1, 0) &= 1 \\ f_y(1, 0) &= 1 \end{aligned}$$

de lo que sigue que la diferencial de f en $(1, 0)$ es

$$[df(1, 0)](x, y) = x + y$$

El punto $(1, 0)$ juega el papel de (x_0, y_0) . El punto $(1'1, -0'1)$ representa $(x_0 + h, y_0 + k)$, esto es, un punto próximo. De aquí sigue que $h = 0'1$ y $k = -0'1$, de modo que la diferencial en $(1, 0)$ evaluada para $(0'1, -0'1)$ es 0 por tanto

$$f(1'1, -0'1) - 1 \approx 0 \Rightarrow f(1'1, -0'1) \approx 1.$$

El valor que nos proporciona la calculadora es $1'1e^{-0'11} = 0'98542$.

Ejemplo 2

Si $z = \frac{x^3}{y^2}$ y queremos calcular valores de z cerca del punto $(2, 1)$ podemos hacer uso de la diferencial ya que esta función es diferenciable en dicho punto. Se tiene que

$$[dz(2, 1)](x, y) = 12x - 16y$$

Si queremos obtener un valor aproximado de

$$\frac{(2'01)^3}{(0'999)^2}$$

haciendo uso de la diferencial, tomamos como punto (x_0, y_0) el $(2, 1)$ ya que en éste es un punto donde se conoce el valor de la función. El punto $(2'01, 0'999)$ jugará el papel de $(x_0 + h, y_0 + k)$ que es el punto donde se pretende obtener el valor aproximado. Por tanto, $h = 0'01$ y $k = -0'001$, con lo cual podemos escribir

$$\frac{(2'01)^3}{(0'999)^2} - 8 \approx 12 \cdot 0'01 - 16 \cdot (-0'001)$$

o lo que es equivalente

$$\frac{(2'01)^3}{(0'999)^2} \approx 8 + 0'12 + 0'016 = 8'136$$

Con la calculadora se obtiene el valor $8'136886$ lo que pone de manifiesto el grado de aproximación de este valor.

Tenemos así que la diferencial de una función permite aproximar los valores de dicha función cerca de un punto.

Este razonamiento es igualmente válido para funciones de tres variables.

Diferencial total.

La expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$$

recibe el nombre, como hemos visto, de diferencial de la función f en un punto concreto, digamos (x_0, y_0) , para los valores (h, k) . Por tradición y razones rigurosamente justificadas, en las que no vamos a entrar se escribe

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

expresión que lleva el nombre de *diferencial total* de la función f , a partir de la cual se puede determinar la diferencial de f en cualquier punto.

En el caso de una función de tres variables, si $u = f(x, y, z)$ entonces su diferencial total será

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Ejemplo 1

Si $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, su diferencial total es

$$dz = 2xdx + 2ydy$$

y la diferencial en el punto $(1, 4)$ será

$$[dz(1, 4)](h, k) = 2h + 8k.$$

o bien

$$[dz(1, 4)](x, y) = 2x + 8y.$$

Veamos ahora otra aplicación del concepto de diferencial de una función.

Ejemplo 2

El radio de la base y la altura de un cono circular recto se han medido dando como resultado 10 cm y 25 cm respectivamente, con un posible error en la medida de 0'1 cm como máximo en cada uno. Utilizar la diferencial para estimar el error que se produce en el cálculo del volumen del cono.

Solución:

Si un cono tiene por radio de la base x y por altura y , su volumen es

$$V = \frac{\pi}{3}x^2y$$

El error cometido es la diferencia entre el valor del volumen en $(10, 25)$ y el valor del mismo en $(10 + 0'1, 25 + 0'1)$:

$$V(10 + 0'1, 25 + 0'1) - V(10, 25)$$

que, aproximadamente, es la diferencial de V en $(10, 25)$. Como la diferencial es

$$dV = \frac{2\pi}{3}xydx + \frac{\pi}{3}x^2dy.$$

En el punto $(10, 25)$ la diferencial es

$$[dV(10, 25)](h, k) = \frac{500\pi}{3}h + \frac{100\pi}{3}k$$

Al ser cada error menor que $0'1$ se tiene $h \leq 0'1$ y $k \leq 0'1$ y, por tanto, la diferencial vale

$$[dV(10, 25)](0'1, 0'1) = \frac{500\pi}{3}0'1 + \frac{100\pi}{3}0'1 = 20\pi \approx 63\text{cm}^3$$

Un caso con tres variables:

Ejemplo 3

Se han medido las dimensiones de una caja en forma de paralelepípedo dando como resultado 75 cm, 60 cm y 40 cm respectivamente para el largo, ancho y alto. Sin embargo, se ha cometido un error de $0'2$ cm en cada medición. Estimar el error cometido al calcular el volumen de la caja.

Solución:

El volumen de una caja en forma de paralelepípedo de dimensiones x , y y z es $V = xyz$.

Razonando como en el caso anterior, la diferencial nos permite determinar un valor aproximado de la diferencia entre el volumen calculado tomando como dimensiones $75 \times 60 \times 40$ y el volumen calculado teniendo en cuenta el error.

La diferencial total de V es

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

En el punto $(75, 60, 40)$ se tiene:

$$[dV(75, 60, 40)](h, k, l) = 2400h + 3000k + 4500l$$

Si tomamos $h = k = l = 0.2$ se tiene que $dV = 1980$ que es el error cometido al calcular el volumen con las dimensiones dadas y el error dado. A pesar de que parezca mucho 1980 cm^3 sólo representa el 1 % del volumen de la caja.

Consideremos ahora otro problema: si tenemos una expresión del tipo

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

¿representa la diferencial de alguna función? Esto es, ¿existe alguna función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$?. La respuesta es afirmativa siempre que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ejemplo 4

La expresión $xydx + \frac{x^2}{2}dy$ cumple la igualdad anterior. Para determinar la función f de la cual esta expresión es su diferencial planteemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy$$

de aquí se deduce que $f(x, y) = \frac{x^2}{2}y + \varphi(y)$ donde φ representa una función de y a determinar. Pero como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2}$$

se tendrá

$$\frac{x^2}{2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{2}$$

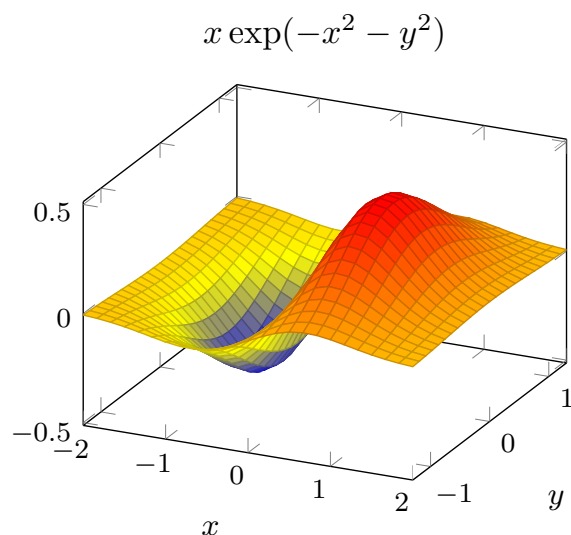
de donde sigue que $\varphi'(y) = 0$, es decir, φ es una función constante, con lo cual la función buscada es $f(x, y) = \frac{x^2}{2}y + C$ donde C es una constante arbitraria.

Extremos relativos.

Sea f una función definida en un conjunto D al que pertenece el punto (x_0, y_0)

1. si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0) se dice que f tiene un *mínimo relativo* en (x_0, y_0) y que el número real $f(x_0, y_0)$ es un *mínimo relativo* de f .
2. si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0) se dice que f tiene un *máximo relativo* en (x_0, y_0) y que el número real $f(x_0, y_0)$ es un *máximo relativo* de f .

Decir que $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo de f significa que el punto (x_0, y_0, z_0) es al menos tan alto como los puntos de su entorno en la gráfica de $z = f(x, y)$. De forma similar, $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo de f si (x_0, y_0, z_0) está al menos tan bajo como los puntos de su entorno en la gráfica.



Condiciones necesarias de máximo o mínimo.

Para localizar extremos relativos de f , investigaremos los puntos en que su gradiente es cero o no está definido. Llamaremos a tales puntos *puntos críticos* de f .

Definición de punto crítico

Sea f definida en un conjunto abierto D conteniendo (x_0, y_0) . Decimos que (x_0, y_0) es un punto crítico de f si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0)$ ó $f_y(x_0, y_0)$ no existen.

Teorema

Si $f(x_0, y_0)$ es un extremo relativo de f en un conjunto abierto D , entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f .

Igual que ocurre en el caso de una variable, no todos los puntos críticos son extremos relativos de la función. En un punto crítico, la función puede tener un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguna de las dos cosas.

Ejemplo 1 Consideremos los puntos críticos de las siguientes tres funciones:

$$\text{a) } z = x^2 + y^2 \quad \text{b) } z = 1 - x^2 - y^2 \quad \text{c) } z = y^2 - x^2$$

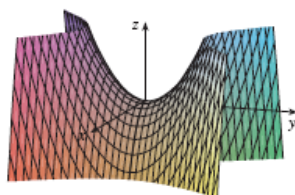
a) $z_x = 2x$, $z_y = 2y$. Por tanto el único punto crítico es el $(0, 0)$. La función tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ porque x^2 e y^2 son no negativos, luego $x^2 + y^2 \geq 0$.

b) $z_x = -2x$, $z_y = -2y$. El único punto crítico de esta función es el $(0, 0)$. Se tiene que en este punto $z = 1$. Sin embargo, $1 - x^2 - y^2 \leq 1$. De donde sigue que la función posee un máximo relativo en $(0, 0)$.

c) $z_x = -2x$, $z_y = 2y$. El único punto crítico de esta función es el $(0, 0)$. Esta función no tiene máximo ni mínimo relativo en $(0, 0)$ ya que en $(0, 0)$ la función $z = 0$, sin embargo, cuando $x = 0$ es $z > 0$ si $y \neq 0$, mientras que cuando $y = 0$ es $z < 0$ si $x \neq 0$.

El último teorema nos dice que para encontrar los extremos relativos necesitamos solamente examinar valores de $f(x, y)$ en puntos críticos. Sin embargo, al igual que se cumple para una función de una variable, los puntos críticos de una función de dos variables no siempre nos conducen

a máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos conducen a *puntos de silla*, que no son ni máximos ni mínimos relativos. Por ejemplo, el punto de silla que se muestra en la figura siguiente no es un extremo relativo, ya que en un disco abierto centrado en el $(0, 0)$ la función toma ambos, valores negativos (sobre el eje X) y valores positivos (sobre el eje Y).



Page 1/1

Los ejemplos anteriores muestran que en un punto crítico no tiene por qué haber necesariamente un máximo o un mínimo. Concretamente, en la última figura se observa cómo esto es posible. La gráfica corresponde al paraboloides hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que tiene como plano tangente en el origen el plano horizontal $z = 0$. No obstante, en $(0, 0)$ no hay máximo ni mínimo. Corresponde a lo que se conoce con el nombre de *punto de silla* en referencia clara a su forma.

De forma análoga al caso de las funciones de una variable, se dispone de un criterio que proporciona condiciones suficientes, en el caso de funciones de dos variables, para determinar la naturaleza de un punto crítico. Estas condiciones, como veremos, se basan en las derivadas parciales de segundo orden.

Hessiano.

Si la función $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ se denomina Hessiano de f en el punto $(x, y) \in D$ al determinante:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

Condiciones suficientes para la existencia de extremo.

Sea f una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un conjunto que contiene un punto (a, b) para el que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Si $H(a, b)$ representa el Hessiano de f en (a, b) entonces se verifica:

1. Si $H(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces f alcanza en el punto (a, b) un mínimo relativo.
2. Si $H(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces f alcanza en el punto (a, b) un máximo relativo.
3. Si $H(a, b) < 0$ entonces la función tiene un punto de silla en (a, b) .
4. Si $H(a, b) = 0$ entonces no se tiene información por esta vía.

Si $H(a, b) > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo. Esto significa que se puede reemplazar $f_{xx}(a, b)$ por $f_{yy}(a, b)$ en las dos primeras partes del criterio.

Ejemplo 1

Encontrar los extremos relativos de

$$f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$$

Comenzamos buscando los puntos críticos de f . Puesto que

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y, \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

están definidas para todo x e y , los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales ambas derivadas parciales primeras son nulas. Para localizar

estos puntos, hacemos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ cero y obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{array} \right\}$$

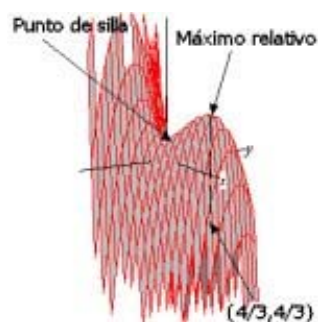
De la segunda ecuación vemos que $x = y$, y sustituyendo en la primera obtenemos dos soluciones: $y = x = 0$ e $y = x = 4/3$. Como

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

se sigue que para el punto crítico $(0, 0)$, $H(0, 0) = -16 < 0$ y, por el criterio de las derivadas parciales segundas, concluimos que $(0, 0, 1)$ es un punto de silla de f . Para el punto crítico $(4/3, 4/3)$, se tiene $H(4/3, 4/3) = 16 > 0$ y como

$$f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$$

concluimos que $f(4/3, 4/3)$ es un máximo relativo, como se muestra en la figura:



Page 1/1

El criterio de las derivadas parciales segundas puede fallar, a la hora de buscar los extremos relativos, de dos formas. Si una de las derivadas parciales primeras no está definida, entonces no podemos usar el criterio. También si $H(a, b) = 0$ el criterio no es útil. En tales casos, debemos confiar en una gráfica o en algún otro tipo de tratamiento, como se ve en el ejemplo 4

Ejemplo 2

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$.

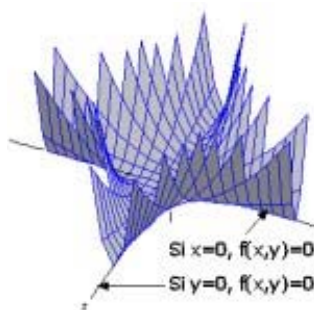
Como

$$f_x(x, y) = 2xy^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2x^2y$$

vemos que ambas derivadas parciales son nulas si $x = 0$ o $y = 0$. Es decir, todo punto de el eje X o del eje Y es un punto crítico. Como

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 4xy, \quad f_{yy}(x, y) = 2x^2$$

vemos que $H(0, 0) = 0$. Luego el criterio de las derivadas parciales segundas no decide. Sin embargo, como $f(x, y) = 0$ para todo punto del eje X o del eje Y , y puesto que $f(x, y) = x^2y^2 > 0$ para los demás puntos, podemos concluir que cada uno de estos puntos críticos conduce a un mínimo absoluto, como se muestra en la figura:



Page 1/1

Problemas

1. Calcular las derivadas parciales $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, siendo

$$z = \frac{x+y}{x-y}$$

$$z = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$z = y \sin xy$$

$$z = \sqrt{e^{x+2y} - y^2}$$

$$z = (x^2y + y^2x)^{-3}$$

$$z = \arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{y}{x}$$

$$\rho = \sin 2\theta \cos 3\phi$$

$$\rho = e^{\theta+\phi} \cos(\theta - \phi)$$

2. Si $z = (ax + by)^2 + e^{ax+by} + \text{sen}(ax + by)$, comprobar que $bz_x = az_y$.

3. Dada la función

$$z = \frac{x^2}{2y(x+y)}$$

calcular $xz_x + yz_y$.

4. Si $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $z(0, 0) = 0$, ¿existen $z_x(0, 0)$ y $z_y(0, 0)$? Probar que esta función es discontinua en $(0, 0)$

5. Si $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{x + y}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ calcular $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

6. Si $u = x^2y + y^2z + z^2x$, demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x + y + z)^2$$

7. Si $z = x^3 + \frac{y^5}{x^2}$ demostrar que $xz_x + yz_y = 3z$.

8. Si $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ demostrar que $xu_x + yu_y + zu_z = -u$.

9. Probar que la función $U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

10. Demostrar que si $w = \left(\frac{x - y + z}{x + y - z} \right)^n$, siendo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ y $w(0, 0, 0) = 0$ entonces

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

indicar los posibles puntos excepcionales. Calcular $w_x(0, 0, 0)$, $w_y(0, 0, 0)$ y $w_z(0, 0, 0)$.

11. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $\rho = \tan 2\theta \cot 4\phi$

b) $\rho = e^{-\theta} \cos \frac{\phi}{\theta}$

12. Si $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + 2y)$, demostrar que

$$f_x(0, \frac{\pi}{4}) = -1, \quad f_y(0, \frac{\pi}{4}) = 0$$

13. Si $z = \frac{xy}{x - y}$, demostrar que

$$x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$$

14. Si $z = \sin ax \sin by \sin kt\sqrt{a^2 + b^2}$, demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

15. Si

$$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

probar que

$$xu_{yz} = yu_{zx} = zu_{xy}$$

16. Probar que la función $u = (x - at)^2 + (x + at)^3$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

llamada *ecuación del calor*.

17. Dada la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + \frac{y}{x + y}$$

hallar a y b para que se verifique la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

para cualquier punto (x, y) con $x + y \neq 0$.

18. Demostrar que la función $f(x, y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\sin x$ satisface la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

19. Si $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$, demostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$$

20. Evaluar dw en $(1, 2, 3)$ siendo $w = xy - xz + 2yz$.
21. Si $w = 2x - y^2 + xz$, calcular el valor exacto de $\Delta w = w(1'01, 0'98, 2'04) - w(1, 1, 2)$ y el aproximado por $dw(1, 1, 2)$.
22. La temperatura T en el punto (x, y, z) de una cierta región del espacio está dada por $T(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$. Utilizando la diferencial calcular la temperatura aproximada en el punto $(2'014, 2'15, 1'06)$.
23. Si $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ encontrar la diferencial de esta función en el punto $(1, -1)$.
24. Determinar la diferencial de la función $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ en el punto $(0, 0, 0)$.
25. Si $z = x^2y^3$, utilizar la diferencial para dar un valor aproximado de $(1'01)^2(0'98)^3$.
26. Al medir el diámetro y la altura de un cilindro circular recto se obtiene 12 cm y 8 cm, respectivamente. Si en cada medida hay un error probable de 0'2 cm ¿cuál es aproximadamente el mayor error posible en el volumen calculado?
27. El peso específico de un sólido se da por la fórmula

$$s = \frac{P}{w},$$

en donde, P es el peso en el vacío y w es el peso de un volumen igual de agua. ¿Cómo afecta al peso específico calculado un error de 0'1 en el valor de P y 0'05 en el valor de w , suponiendo $P = 8$ y $w = 1$ en el experimento: a) si ambos errores son positivos; b) si un error es negativo?

28. La resistencia de un circuito se halló empleando la fórmula

$$C = \frac{E}{R},$$

siendo C la intensidad de la corriente y E la fuerza electromotriz. Si hay un error de $\frac{1}{10}$ de amperio en C y $\frac{1}{20}$ de voltio en E , ¿cuál es el valor aproximado del error de R si las lecturas son $C = 15$ amperios y $E = 110$ voltios?

29. El período de oscilación de un péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

¿Cuál es el error mayor aproximado en el período si hay un error de ± 3 cm en la medida de una longitud de 3 m, y si g se toma como 9.80 m/s², puede tener un error de 15 mm/s²?

30. Las dimensiones de un cono son: radio de la base = 4m, altura = 6m. ¿Cuál es el error aproximado del volumen y de la superficie total si la medida empleada se ha acortado un 1 %?

31. Un sólido tiene la forma de un cilindro coronado en cada extremidad con un hemisferio cuyo radio es el del cilindro. Sus dimensiones medidas son: circunferencia = 20 cm y altura 25 cm. ¿cuál es aproximadamente, el error cometido en la medida del volumen y de la superficie total, si la cinta que se empleó en la medición se ha alargado uniformemente un 0.5 %?

32. La potencia calorífica disipada en una resistencia eléctrica viene dada por

$$P = \frac{E^2}{R}$$

vatios. Siendo $E = 200$ voltios y $R = 8$ ohmios, hallar la disminución que experimenta la potencia cuando E disminuye en 5 voltios y R lo hace en 0.2 ohmios.

33. Utilizar la noción de diferencial de una función para calcular, aproximadamente:

- a) $(5'01)^2 + (11'94)^2$
- b) $8'02\sqrt{9'05}$
- c) $\arctan \frac{0'99}{1'001}$
- d) $(0'99e^{0'02})^8$
- e) $(0'99)^3 + (2'01)^3 - 6(0'99)(2'01)$

34. La resistencia total R que producen dos resistencias conectadas en paralelo es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Estimar el cambio en R cuando R_1 pasa de 10 a 10,5 ohmios y R_2 de 13 a 15 ohmios.

35. La inductancia L (en microhenrios) de un hilo recto no magnético en el espacio libre es

$$L = 0,00021 \left(\ln \frac{2h}{r} - 0,75 \right)$$

donde h es la longitud del hilo en mm y r el radio de su sección circular. Estimar L para $r = 2 + \frac{1}{16}$ mm y $h = 100 + \frac{1}{100}$ mm.

36. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son diferenciales de funciones?

- a) $(2xy + y^3)dx + (x^2 + 3x^2y)dy$
- b) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy$
- c) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy$
- d) $ydx - xdy$