

Integral definida

Aplicaciones de la integral definida

Métodos numéricos

1. Introducción

La integral definida es una herramienta de gran utilidad en las ciencias físicas, naturales y sociales, ya que muchas magnitudes de interés en dichas ciencias pueden definirse mediante el tipo de suma que se presenta en la integral definida.

La idea de integral definida surge al tratar de calcular áreas de recintos planos delimitados por gráficas de funciones. Un caso sencillo puede ser el área delimitada en la figura.

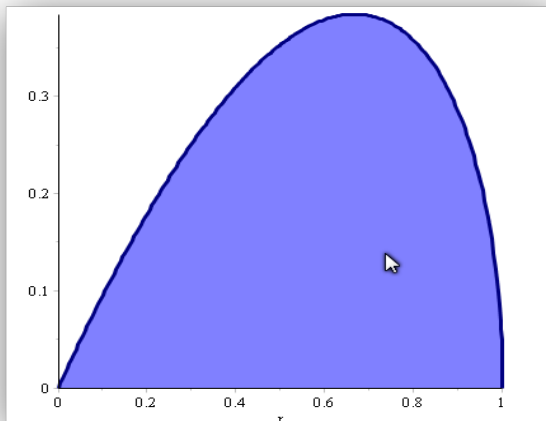
2. Integral definida de una función continua

Consideremos una función continua f en un intervalo $[a, b]$ y el recinto limitado por la gráfica de f , las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje OX .

Un valor aproximado del área limitada por ese recinto se obtiene dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n partes a través de $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. En cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ consideramos el punto medio t_k y el rectángulo de base dicho intervalo y altura $f(t_k)$. Obtenemos $R_1, R_2, \dots, R_n$ rectángulos con áreas $f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

Si sumamos todas las áreas obtenemos un valor que depende de n

$$F_n = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$



Si hacemos $n \rightarrow \infty$ nos queda un valor que denominamos *integral definida* de $f(x)$ entre a y b y que denotamos por

$$\int_a^b f(x)dx$$

Aquí a y b se denominan límites de integración.

Si la función $f(x)$ es positiva $\forall x \in [a, b]$ o negativa $\forall x \in [a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

es el área determinada por la curva y el eje OX en el intervalo $[a, b]$.

Propiedades:

1.

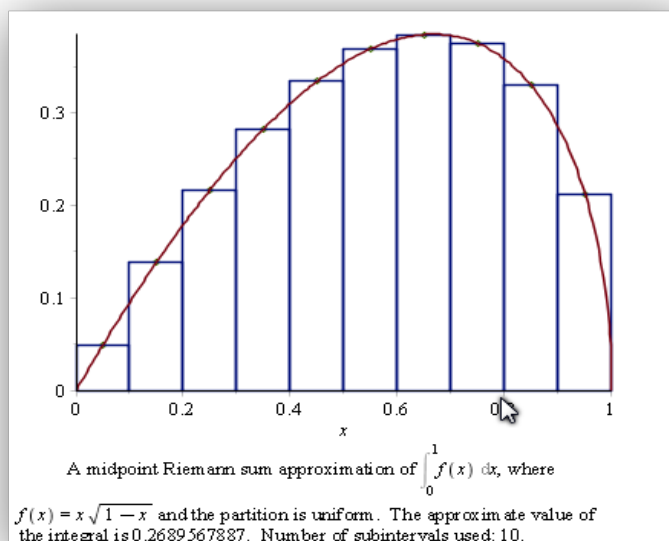
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Si K es una constante entonces

$$\int_a^b K f(x)dx = K \int_a^b f(x)dx$$

3.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$



4. Si c es un punto que se encuentra entre a y b se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Regla de Barrow.

Si la función F es una primitiva de f , es decir $F'(x) = f(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

1.

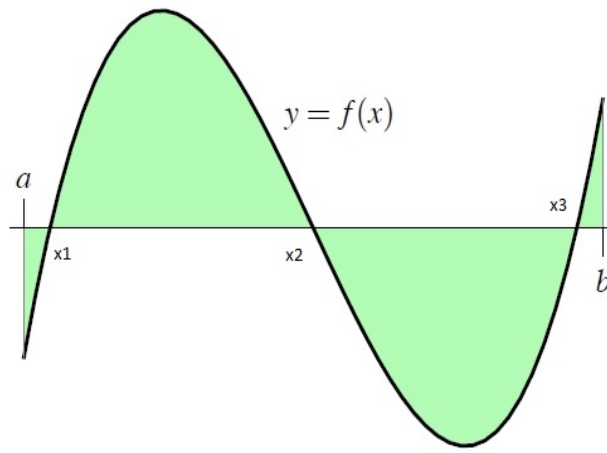
$$\int_0^1 x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} e^{x^2-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

3. Cálculo de áreas.

Pretendemos calcular el área de la figura limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[a, b]$



En primer lugar calculamos los puntos de corte de la curva con el eje OX , esto es, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$.

Considerando los puntos de corte entre a y b calculamos el área de la siguiente forma:

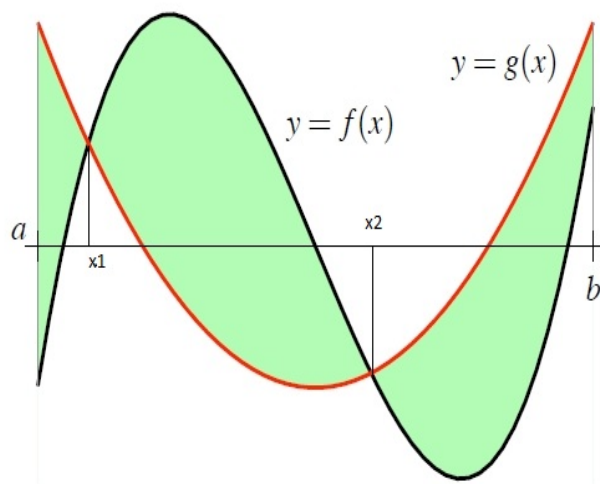
$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_3}^b f(x) dx \right|$$

Si queremos calcular el área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$, hallamos los puntos de corte resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$ y nos queda, si x_1 y x_2 son las soluciones

$$A = \left| \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_2}^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Ejemplos:

1. Área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 2$ y el eje OX .



Puntos de corte: $-x^2 + 4x + 2 = 0$. Soluciones ($\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$): $x = 2 + \sqrt{6}$, $x = 2 - \sqrt{6}$ de donde el área es:

$$A = \left| \int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} (-x^2 + 4x + 2) dx \right| = \left| -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 2x \right|_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} = 19,59$$

2. Área comprendida entre la curva $x = (y + 1)(y - 3)$ y el eje OY .

El problema se resuelve igual pero intercambiando los papeles de x e y .

Resolvemos la ecuación $(y + 1)(y - 3) = 0$ que da $y = -1$, $y = 3$ y se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^3 (y + 1)(y - 3) dy \right| = \left| \int_{-1}^3 (y^2 - 2y - 3) dy \right| \\ &= \left| \frac{y^3}{3} - y^2 - 3y \right|_{-1}^3 \approx |-10,67| = 10,67 \end{aligned}$$

3. Determinar el área del recinto limitado por las curvas $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$ en el intervalo $[-3, 0]$.

Averiguemos si las dos curvas se cortan en algún punto del intervalo $[-3, 0]$. Para ello resolvemos la ecuación $x^3 - 3x + 8 = -3x$. Es decir, $x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$.

Tenemos dos regiones, así que:

$$A = \left| \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8) dx \right| + \left| \int_{-2}^0 (x^3 + 8) dx \right|$$

$$= \left| \frac{x^4}{4} + 8x \right|_{-3}^{-2} + \left| \frac{x^4}{4} + 8x \right|_{-2}^0 = \left| -12 + \frac{15}{4} \right| + |12| = \frac{81}{4}$$

4. Determinar el área comprendida entre las curvas de ecuaciones $y = \frac{(x-2)^2}{9} - 1$, $y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$, $x = 4$.

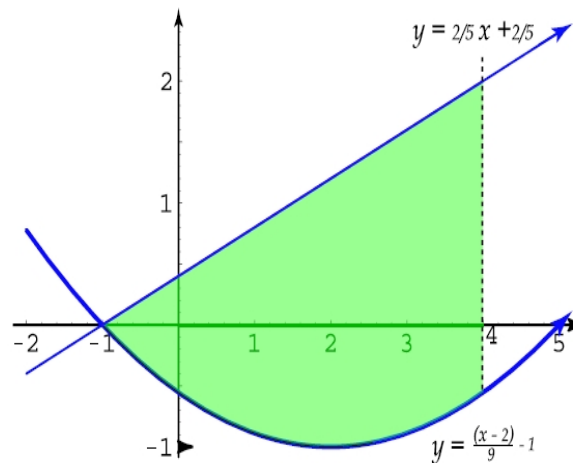
Resolviendo la ecuación

$$\frac{(x-2)^2}{9} - 1 = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$$

da como soluciones -1 y $\frac{43}{5}$. Puesto que $\frac{43}{5} > 4$ el área será:

$$A = \left| \int_{-1}^4 \left(\frac{(x-2)^2}{9} - 1 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} \right) dx \right|$$

$$\left| \frac{(x-2)^3}{27} - x - \frac{x^2}{5} - \frac{2}{5}x \right|_{-1}^4 = \left| \frac{-235}{27} \right| = \frac{235}{27}$$



5. Calcular el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = 5 - x$, $y = \frac{4}{x}$.

Determinamos los puntos de corte entre ambas curvas resolviendo el sistema:

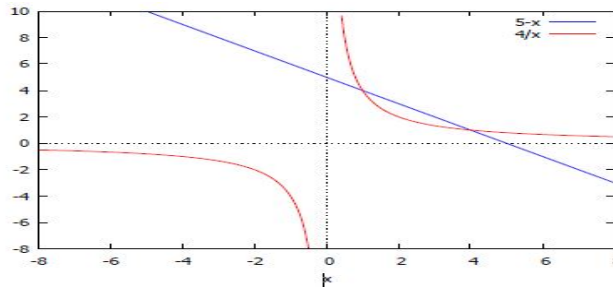
$$y = 5 - x$$

$$y = \frac{4}{x}$$

de donde $5 - x = \frac{4}{x}$, es decir $x(5 - x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, y así tenemos los puntos $x = 1$ y $x = 4$. y el área será:

$$A = \left| \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx \right| = \left| 5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x \right|_1^4$$

$$= \left| 20 - 8 - 4 \ln 4 - 5 + \frac{1}{2} + \ln 1 \right| = \left| \frac{15}{2} - \ln 4 \right| = \frac{15}{2} - \ln 4.$$



Page 1/1

4. Integración numérica.

Cuando queremos calcular una integral definida pueden darse dos situaciones excepcionales:

a) No sabemos resolver la integral indefinida correspondiente, por ejemplo:

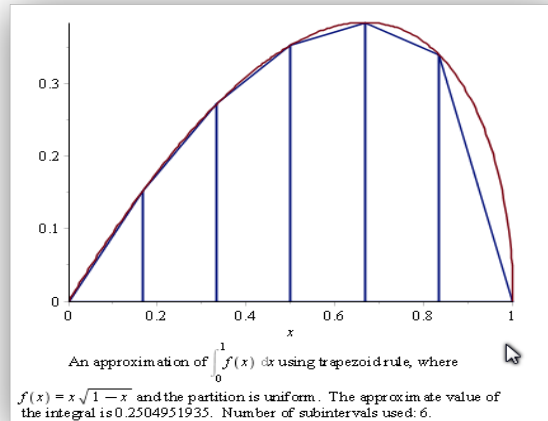
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

b) El integrando no es conocido explícitamente. La función $f(x)$ solo se conoce para ciertos valores (en problemas de laboratorio).

En estos casos se pretende encontrar un valor aproximado de la integral. Aquí daremos idea de los dos métodos más usuales a este nivel.

Regla trapezoidal.

Se trata de encontrar un valor aproximado de $\int_a^b f(x)dx$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales (n intervalos) de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Se



tiene que una aproximación a la integral es la suma de las áreas de los trapecios, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

Regla de Simpson.

Para aproximar la integral por este método debemos dividir el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales con n **par**.

La idea es aproximar la integral utilizando parábolas que pasan por cada tres puntos. Obtenemos:

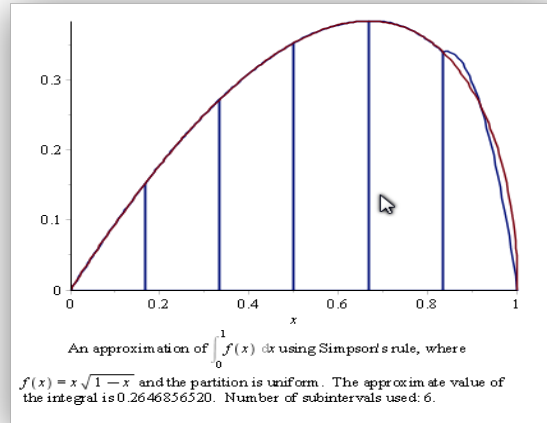
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(b))$$

Ejemplos:

1. Calcular el valor de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ utilizando los dos métodos con $n = 4$.

Está claro que $h = 1/4 = 0,25$. Con el método del trapecio tendríamos que

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,25 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1,25} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,75} + \frac{1}{4} \right) = 0,6975$$



Con el de Simpson sería:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,25}{3} \left(1 + 4\frac{1}{1,25} + 2\frac{1}{1,5} + 4\frac{1}{1,75} + \frac{1}{2} \right) = 0,6925$$

y el valor exacto es $\ln 2 = 0,6931$.

2. Supongamos una función desconocida salvo para ciertos valores:

t	0	4	8	12	16
$f(t)$	0	1,2	2,3	3	2

Calcular $\int_0^{16} f(t) dt$.

En este caso se tienen cuatro intervalos. y $h = 4$. Con la regla trapezoidal tenemos:

$$\int_0^{16} f(t) dt \approx 4 \left(\frac{f(0)}{2} + f(4) + f(8) + f(12) + \frac{f(16)}{2} \right) = 30$$

Por la regla de Simpson:

$$\int_0^{16} f(t) dt \approx \frac{4}{3} (f(0) + 4f(4) + 2f(8) + 4f(12) + f(16)) = 31,2$$

5. Valor medio de una función.

Consideremos una función dada por $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Se denomina *valor medio* de la función en $[a, b]$ al número real

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Este concepto es una generalización de la media aritmética de varios números $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$$

En cierto modo es como si tratásemos de sumar todos los valores de $f(x)$ en $[a, b]$ ($\int_a^b f(x) dx$) y dividir por el número de valores en $[a, b]$, $(b-a)$.

Ejemplo:

Si la temperatura en un lugar t horas después de mediodía viene dada por $T(t) = 47 + 3t - 0,5t^2$. ¿Cuánto vale la temperatura media entre las 12 y las 18 horas?.

$$\bar{T} = \frac{1}{6-0} \int_0^6 (47 + 3t - 0,5t^2) dt = 50^\circ$$

6. Respuesta cardiaca

Un ejemplo interesante desde el punto de vista de las ciencias de la salud es lo que se conoce como *respuesta cardíaca*.

Vamos a ilustrar una aplicación interesante de la integración en la medición de la respuesta cardíaca, es decir, la aplicación del cálculo en ciencias de la salud.

El flujo cardíaco depende de los siguientes factores:

1. Frecuencia cardíaca y volumen sistólico
2. Presión arterial.
3. Bombeo de sangre por unidad de tiempo.

El volumen de sangre que bombea el corazón por unidad de tiempo se conoce como el flujo cardíaco o respuesta cardíaca del corazón. También se puede definir como el flujo de la sangre hacia la aorta.

Como veremos, para medir la respuesta cardíaca se necesitan conocimientos básicos de integración.

Método de dilución de tinte

En este método, se inyecta un tinte en la aurícula derecha y fluye con la sangre hacia la aorta derecha.

Se mide la concentración de tinte a través de una sonda insertada en la aorta en instantes igualmente espaciados en un intervalo de tiempo $[0, T]$ hasta que el tinte se haya aclarado. Sea $c(t)$ la concentración del tinte en el instante t . Si dividimos $[0, T]$ en n subintervalos de igual longitud Δt , entonces la cantidad de tinte que fluye pasado el punto de medición en el subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es aproximadamente

$$(\text{concentración de tinte en sangre})(\text{volumen de sangre}) = c(t_k)(F\Delta t)$$

donde F es el flujo que estamos tratando de determinar.

De este modo, la cantidad total de tinte es aproximadamente

$$c(t_1)F\Delta t + c(t_2)F\Delta t + \cdots + c(t_n)F\Delta t,$$

y, para $n \rightarrow \infty$, tenemos que la cantidad de tinte es

$$A = \int_0^T Fc(t)dt = F \int_0^T c(t)dt.$$

Así, la respuesta cardíaca está dada por

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}$$

donde se conoce la cantidad de tinte A y la integral se puede aproximar a partir de lecturas de la concentración.

Ejemplo

Se inyecta una dosis de 5 mg de tinte en la aurícula derecha. Se mide la concentración del tinte (en miligramos por litro) en la aorta a intervalos de un segundo como se muestra en la tabla. Estimar la respuesta cardíaca haciendo uso de la regla de Simpson.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c(t)	0	0'4	2'8	6'5	9'8	8'9	6'1	4'0	2'3	1'1	0

Solución

Aquí $A = 5$, $\Delta t = 1$ y $T = 10$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{10} c(t) dt \\
 & \approx \frac{1}{3} (0 + 0 + 4(0'4 + 6'5 + 8'9 + 4'0 + 1'1) + 2(2'8 + 9'8 + 6'1 + 2'3)) \\
 & = 41'87
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la respuesta cardíaca es

$$F = \frac{A}{\int_0^{10} c(t) dt} = \frac{5}{41'87} = 0'12 \text{ L/s} = 7'2 \text{ L/min}$$

Ejercicio propuesto

El método de dilución de tinte se utiliza para medir la respuesta cardíaca con 6 mg de tinte. Las concentraciones de tinte, en mg/L, están modelados por $c(t) = 20te^{20,6t}$, $0 \leq t \leq 10$, donde t se mide en segundos. Encontrar la respuesta cardíaca.