

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Aplicaciones

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales se presentan en una infinidad de situaciones que se estudian a través de distintos modelos matemáticos aplicados a ciencias de la vida, fenómenos de la naturaleza, ingeniería, economía, etc. y de los cuales veremos algunos casos a lo largo de este tema. En este sentido las ecuaciones diferenciales permiten el estudio de los cambios en magnitudes que se presenta en multitud de aspectos de la ciencia y de la técnica.

Una ecuación diferencial ordinaria EDO es una ecuación en la que la incógnita es una función, y en la cual aparece su variable y algunas derivadas de la misma. En este tema nos limitaremos al estudio de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, esto es, una ecuación con la función su variable y la derivada de la función. En el apartado de aplicaciones veremos tres casos ilustrativos.

Las EDO de primer orden suelen presentarse en las formas:

$$y' = f(x, y), \quad F(x, y, y') = 0, \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

aquí f , P , Q , etc. son funciones.

Por ejemplo:

$$y' = x + y, \quad e^x + yy' = 0, \quad xdx + ydy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = xy$$

En muchos casos la variable es el tiempo y, como es usual, se denota por t en lugar de utilizar x .

Veamos un ejemplo:

Se administra un medicamento a un paciente por vía intravenosa que varía a lo largo del tiempo siguiendo la función $A(t) = 1 + \sin t$ mg/(mL hora) y es metabolizado a lo largo del tiempo siguiendo la función $y(t)$ mg/(mL hora), donde $y(t)$ es la concentración en el instante t , la cual verifica la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \sin t - y.$$

Comprobar que la familia de funciones $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(2 - \cos t + \sin t)$ satisface la ecuación diferencial.

Solución

En primer lugar calculamos $y'(t)$:

$$y'(t) = -Ce^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$

y sustituimos en la ecuación diferencial $y'(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{aligned} 1 + \sin t - y &= 1 + \sin t - Ce^{-t} - \frac{1}{2}(2 - \cos t + \sin t) \\ &= 1 + \sin t - Ce^{-t} - 1 + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - Ce^{-t} = y'(t) \end{aligned}$$

En relación a este ejemplo analicemos otra cuestión:

¿Cuál es la concentración de medicamento en función del tiempo para el modelo del ejemplo anterior si la concentración inicial del fármaco en $t = 0$ es cero?

Solución

Se trata encontrar la función concreta de la familia de funciones dada por $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(2 - \cos t + \sin t)$ que satisface la condición $y(0) = 0$.

Sustituyendo $t = 0$ en la expresión de $y(t)$ resulta

$$y(0) = Ce^0 + \frac{1}{2}(2 - \cos 0 + \sin 0) = 0 \Leftrightarrow C + \frac{1}{2} = 0$$

y, por tanto, $C = -\frac{1}{2}$. De este modo, la solución del *problema de valores iniciales* es

$$y(t) = \frac{1}{2}(2 - e^{-t} - \cos t + \sin t).$$

2. Definiciones

2.1. Solución general

Dada una EDO de primer orden, en cualquiera de sus formas, se denomina solución general a un conjunto o familia de funciones dependientes de un parámetro que satisface la EDO.

En el ejemplo anterior, la familia de funciones dada por $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(2 - \cos t + \sin t)$ (el parámetro es C) satisface la ecuación $y' = 1 + \sin t - y$ para cualquier valor de C . Entonces decimos que ésta es la solución general.

A veces la solución particular viene dada de forma implícita, esto es, sin estar la función despejada ya que el procedimiento seguido para resolver la EDO nos ha conducido a esa expresión.

Por ejemplo, $x^2 - y^2 = C$ es una solución de la ecuación $y' = \frac{x}{y}$. Esto lo trataremos posteriormente.

2.2. Solución particular

Una solución particular de una EDO es una de las funciones de la familia que satisface la EDO y que cumple determinadas condiciones.

En el ejemplo anterior se verifica que para $t = 0$ se tiene que $y(0) = 0$ con lo cual, en estas condiciones tiene que ser $C = -\frac{1}{2}$ y, así la solución particular para esa condición es $y(t) = \frac{1}{2}(2 - e^{-t} - \cos t + \sin t)$.

Como, además, es una solución que cumple $y(0) = 0$ decimos que se trata de un *problema de valores iniciales* ya que el tiempo empieza en $t = 0$.

3. Resolución de algunos tipos de EDO

En general, el problema de encontrar la solución general de una EDO es complicado. Sólo es posible encontrar dicha solución cuando la EDO se puede escribir de determinadas formas, las cuales, a su vez requieren de ciertas técnicas para su resolución. En estos casos es preciso calcular primitivas de algunas funciones para encontrar la solución.

Fuera de esos casos concretos para encontrar soluciones de una EDO es preciso utilizar métodos numéricos que están más allá de los objetivos de este curso.

Concretamente, aquí trataremos solamente tres tipos de EDOs.

3.1. Ecuaciones de variables separadas

Son aquellas que pueden escribirse en la forma

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Si consideramos $\frac{dy}{dx}$ como una fracción se puede expresar en la forma

$$\frac{dx}{f(x)} = g(y)dy$$

ahora se calculan las integrales indefinidas indicadas:

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = F(x), \quad \int g(y)dy = G(y)$$

y la solución general viene dada por $F(x) - G(y) = C$, donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo 1

$$2yy' + x^2 = 0$$

Solución

Esta EDO se puede escribir en la forma

$$y' = -\frac{x^2}{2y} \implies 2ydy = -x^2dx$$

integrando ambos miembros se tiene

$$\int 2ydy = -\int x^2dx \Leftrightarrow y^2 = -\frac{1}{3}x^3$$

y la solución general es

$$y^2 + \frac{1}{3}x^3 = C$$

Ejemplo 2

$$(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$$

Solución

Obsérvese que se puede escribir en la forma

$$(4y + yx^2)dy = (2x + xy^2)dx \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy^2}{4y + yx^2} = \frac{x(2 + y^2)}{y(4 + x^2)}$$

de donde sigue que

$$\begin{aligned}\frac{x}{4 + x^2}dx &= \frac{y}{2 + y^2}dy \\ \int \frac{x}{4 + x^2}dx &= \int \frac{y}{2 + y^2}dy \\ \frac{1}{2} \int \frac{2x}{4 + x^2}dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2y}{2 + y^2}dy\end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{1}{2} \ln(4 + x^2) = \frac{1}{2} \ln(2 + y^2) + C$$

que también podemos escribir (multiplicando por 2 y llamando $K = 2C$) como

$$\ln(4 + x^2) = \ln(2 + y^2) + K \iff \ln(4 + x^2) - \ln(2 + y^2) = K \iff \ln \frac{4 + x^2}{2 + y^2} = K$$

y esta última expresión se puede expresar en la forma

$$\frac{4 + x^2}{2 + y^2} = e^K$$

y si denotamos $e^K = A$ la solución general se puede escribir como

$$\frac{4 + x^2}{2 + y^2} = A \iff x^2 + 4 = A(y^2 + 2)$$

Ejemplo 3

Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = y \operatorname{sen} x$$

que verifica $y(\pi) = -3$.

Solución

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x \iff \frac{1}{y} dy = \operatorname{sen} x dx$$

de lo que sigue que, integrando, queda

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \sin x dx,$$

es decir,

$$\ln |y| = -\cos x + C$$

y, aplicando la condición $y(\pi) = -3$ se tiene

$$\ln 3 = -\cos \pi + C \iff \ln 3 = 1 + C \iff C = \ln 3 - 1$$

con lo cual, la solución particular sería

$$\ln |y| = -\cos x + \ln 3 - 1 \iff \ln \frac{|y|}{3} = -1 - \cos x \iff y = 3e^{-1-\cos x}$$

3.2. Ecuaciones diferenciales lineales

Se dice que una EDO es lineal si se puede expresar en la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones conocidas que dependen solamente de x .

Para resolverlas calculamos $\int P(x)dx$ y multiplicamos la ecuación por $e^{\int P(x)dx}$ resultando la igualdad

$$y'e^{\int P(x)dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

se observa que en la parte izquierda de la igualdad se encuentra

$$(ye^{\int P(x)dx})' = y'e^{\int P(x)dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y$$

derivada de un producto, por consiguiente se tiene

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

Si ahora calculamos la integral que aparece en el segundo y despejando y encontramos la solución general.

Ejemplo 1

Obtener la solución general de la EDO

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 50$$

Solución

En este caso $P(x) = 5$ y $Q(x) = 50$.

Empezamos por calcular

$$\int 5dx = 5x$$

Ahora calculamos

$$e^{\int P(x)dx} = e^{5x}.$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de la EDO por este último término queda:

$$y'e^{5x} + 5ye^{5x} = 50e^{5x}$$

Obsérvese que el primer miembro es la derivada del producto ye^{5x} con lo cual se puede escribir:

$$ye^{5x} = \int 50e^{5x} dx,$$

es decir,

$$ye^{5x} = 10e^{5x} + C \iff y = 10 + Ce^{-5x},$$

la cual constituye la solución general de la EDO.

Ejemplo 2

Obtener la solución general de la EDO

$$(1+x)y' = y + x$$

encontrar la solución que verifica $y(0) = 1$.

Solución

En primer lugar, si escribimos la ecuación en la forma

$$y' = \frac{y}{1+x} + \frac{x}{1+x} \iff y' - \frac{y}{1+x} = \frac{x}{1+x} \iff y' - \frac{1}{1+x}y = \frac{x}{1+x}$$

Se observa que $P(x) = -\frac{1}{1+x}$ y $Q(x) = \frac{x}{1+x}$.

Empezamos por calcular

$$\int \left(-\frac{1}{1+x} \right) dx = -\ln(1+x) = \ln \frac{1}{1+x}$$

Ahora calculamos

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+x}.$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de la EDO por este último término queda:

$$y' \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} \frac{1}{1+x} y = \frac{x}{1+x} \frac{1}{1+x} \iff y' \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} y = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Aquí se ve claramente que el primer miembro es la derivada del producto $y \frac{1}{1+x}$ con lo cual se puede escribir:

$$y \frac{1}{1+x} = \int \frac{x}{(1+x)^2} dx$$

El problema ahora se reduce a calcular

$$\int \frac{x}{(1+x)^2} dx$$

que es la integral de una función racional, la cual es preciso descomponer previamente en fracciones simples:

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

quitando denominadores y calculando A y B se tiene

$$\int \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) + C.$$

Por tanto se tiene la solución general:

$$y \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) + C \iff y = 1 + (x+1) \ln(x+1) + C(x+1)$$

Para terminar solo falta encontrar la solución particular que verifica $y(0) = 1$:

$$1 = 1 + (0 + 1) \ln(0 + 1) + C(0 + 1) = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

con lo cual la solución particular buscada es

$$y = 1 + (x + 1) \ln(x + 1)$$

Ejemplo 3

Obtener la solución general de la EDO

$$y' \operatorname{sen} x + y \cos x = x \operatorname{sen} x$$

encontrar la solución que verifica $y(\pi/2) = 2$.

Solución

Si dividimos ambos miembros por $\operatorname{sen} x$ queda en la forma

$$y' + y \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = x$$

Se observa que es una ecuación lineal con

$$P(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} x, \quad Q(x) = x$$

Ahora calculamos

$$\int P(x) dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} x dx = \ln \operatorname{sen} x$$

y multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $e^{\ln \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$, quedando en la forma inicial

$$y' \operatorname{sen} x + y \cos x = x \operatorname{sen} x.$$

Se observa aquí que el primer miembro es la derivada de la función $y \operatorname{sen} x$ y, por consiguiente

$$(y \operatorname{sen} x)' = x \operatorname{sen} x \iff y \operatorname{sen} x = \int x \operatorname{sen} x dx$$

La última integral se calcula por partes:

$$\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx & v = -\cos x \end{array}$$

de lo que sigue:

$$\int x \sin x dx - x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Con esto la solución general es

$$y \sin x = -x \cos x + \sin x + C,$$

y si ahora aplicamos la condición $y(\pi/2) = 2$ queda

$$2 \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C \iff 2 = 1 + C \iff C = 1.$$

Así, la solución particular es

$$y \sin x = -x \cos x + \sin x + 1.$$

3.3. Ecuaciones diferenciales exactas

Son la EDO que se pueden escribir en la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

y verifican que $P_y = Q_x$, es decir

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

El procedimiento para encontrar la solución consiste en encontrar una función $F(x, y)$ que verifique

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

y la solución de la EDO sería $F(x, y) = C$, siendo C una constante arbitraria, dado que la diferencial de F sería 0.

Un ejemplo es la mejor ilustración del método general a seguir:

Ejemplo 1

Resolver la EDO

$$3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0$$

Solución

En primer lugar tenemos que descartar que sea de uno de los modelos ya estudiados: variables separadas o lineales.

Ahora, teniendo en cuenta que

$$3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0 \iff 3y + e^x + (3x + \cos y)\frac{dy}{dx} = 0$$

es decir,

$$(3y + e^x)dx + (3x + \cos y)dy = 0$$

se sigue que $P(x, y) = 3y + e^x$ y $Q(x, y) = 3x + \cos y$.

Comprobemos:

$$P_y = 3, \quad Q_x = 3$$

está claro que es una diferencial exacta. Vamos en buscar la función F que cumple:

$$F_x = 3y + e^x, \quad F_y = 3x + \cos y.$$

Podemos empezar por cualquiera de las dos:

$$F_x = 3y + e^x \Rightarrow F(x, y) = \int (3y + e^x)dx + g(y) \Rightarrow F(x, y) = 3xy + e^x + g(y),$$

la constante de integración depende de y ya que F es una función de (x, y) y solo hemos integrado respecto a x .

A continuación aplicamos que $F_y = 3x + \cos y$ partiendo de la integración que acabamos de realizar:

$$F(x, y) = 3xy + e^x + g(y) \implies F_y = 3x + g'(y) = 3x + \cos y$$

de lo que sigue

$$g'(y) = \cos y \implies g(y) = \sin y$$

Por consiguiente,

$$F(x, y) = 3xy + e^x + \sin y$$

y la solución general de la EDO es

$$3xy + e^x + \sin y = C$$

Ejemplo 2

Resolver la EDO

$$(x^3 + y^3)dx + 3xy^2dy = 0$$

Solución

se sigue que $P(x, y) = x^3 + y^3$ y $Q(x, y) = 3xy^2$.

Comprobemos:

$$P_y = 3y^2, \quad Q_x = 3y^2$$

está claro que es una diferencial exacta. Vamos en buscar la función F que cumple:

$$F_x = x^3 + y^3, \quad F_y = 3xy^2.$$

Consideremos

$$F_x = x^3 + y^3 \Rightarrow F(x, y) = \int (x^3 + y^3)dx + g(y) \Rightarrow F(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy^3 + g(y),$$

la constante de integración depende de y ya que F es una función de (x, y) y solo hemos integrado respecto a x .

A continuación aplicamos que $F_y = 3xy^2$ partiendo de la integración que acabamos de realizar:

$$F(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy^3 + g(y) \Rightarrow F_y = 3xy^2 + g'(y) = 3xy^2$$

de lo que sigue

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = \text{constante}$$

Por consiguiente,

$$F(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy^3 + \text{constante}$$

y la solución general de la EDO es

$$\frac{x^4}{4} + xy^3 + \text{constante} = C$$

pero como en la solución general de una EDO de primer orden solamente puede haber una constante, la solución general es

$$\frac{x^4}{4} + xy^3 = K.$$

Ejemplo 3

Encontrar la solución particular de la EDO

$$(ye^x + 1)dx + (e^x - 1)dy = 0$$

que satisface la condición $y(1) = 1$.

Solución

se sigue que $P(x, y) = ye^x + 1$ y $Q(x, y) = e^x - 1$.

Comprobemos:

$$P_y = e^x, \quad Q_x = e^x$$

está claro que es una diferencial exacta. Vamos en buscar la función F que cumple:

$$F_x = ye^x + 1, \quad F_y = e^x - 1.$$

Consideremos

$$F_y = e^x - 1 \Rightarrow F(x, y) = \int (e^x - 1)dy + g(x) \Rightarrow F(x, y) = y(e^x - 1) + g(x),$$

la constante de integración depende de x ya que F es una función de (x, y) y solo hemos integrado respecto a y .

A continuación aplicamos que $F_x = ye^x + 1$, partiendo de la integración que acabamos de realizar:

$$F(x, y) = y(e^x - 1) + g(x) \Rightarrow F_x = ye^x + g'(x) = ye^x + 1$$

de lo que sigue

$$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x + \text{constante}$$

y la solución general de la EDO es

$$y(e^x - 1) + x + \text{constante} = C$$

pero como en la solución general de una EDO de primer orden solamente puede haber una constante, la solución general es

$$y(e^x - 1) + x = K.$$

Aplicando la condición $y(1) = 1$ queda

$$e - 1 + 1 = K \Rightarrow K = e$$

con lo cual, la solución particular buscada es:

$$y(e^x - 1) + x = e \Rightarrow y = \frac{e - x}{e^x - 1}.$$

4. Aplicaciones

Las Ecuaciones Diferenciales constituyen un campo muy amplio dentro de las Matemáticas por la gran cantidad de problemas reales que se pueden abordar haciendo uso de ellas.

En este tema solamente vamos a tratar, a modo de introducción, tres situaciones que se resuelven con los conocimientos adquiridos: la desintegración radiactiva, los problemas de temperaturas y los problemas de mezclas.

4.1. Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran espontáneamente emitiendo radiatividad.

Las observaciones experimentales muestran que la masa de sustancia radiactiva Δy que se desintegra en un intervalo de tiempo Δt es proporcional a la masa y y al tiempo transcurrido Δt , esto es, $\Delta y = -ky\Delta t$. Si se consideran intervalos de tiempo Δt próximos a cero se llega a la ecuación diferencial

$$dy = kydt \iff \frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es la constante de desintegración radiactiva ($k > 0$ ya que $\frac{dy}{dt} < 0$), que depende de ciertos factores, entre ellos la naturaleza de la sustancia radiactiva.

En este tipo de modelos matemáticos se define la *vida media* o *semi-vida* al tiempo que transcurre hasta que una cantidad de sustancia se desintegre hasta quedar la mitad.

Ejemplo 1

La vida media del Radio-226 es de 1590 años. Se tienen 100 g de Radio-226. Encontrar la fórmula que nos da la masa al cabo de t años. ¿Cuál es la masa de Radio-226 que queda al cabo de 1000 años? ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que dicha masa se reduzca a 30 g?

Solución

En primer lugar planteamos la ecuación diferencial que sigue el modelo:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde y representa la masa de Radio-226 en el instante t .

Se tiene que

$$\frac{dy}{y} = -ktdt \iff \ln |y| = -kt + C \iff y = e^{-kt+C} = e^{-kt}e^C = Ae^{-kt}$$

donde hemos llamado $A = e^C$.

Si en el instante inicial hay 100 g se tiene que $y(0) = 100$ y, por consiguiente,

$$100 = Ae^{-k0} = A,$$

con lo cual se tiene que

$$y = 100e^{-kt}.$$

Ahora, para encontrar el valor de k aplicamos que la vida media es 1590 años:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} &= ye^{-1590k} \iff \frac{1}{2} = e^{-1590k} \\ -1590k &= \ln \frac{1}{2} = -0'693147 \iff k = 4'3594 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

y así

$$y = 100e^{-4'3594 \cdot 10^{-4}t}.$$

Transcurridos 1000 años queda

$$y = 100e^{-4'3594 \cdot 10^{-4} \cdot 1000}t \approx 65 \text{ mg.}$$

Finalmente, hallemos t para que la masa sea 30 mg

$$30 = 100e^{-4'3594 \cdot 10^{-4}t} \iff -4'3594 \cdot 10^{-4}t = \ln 0'3 = -1'20397$$

con lo cual $t \approx 2762$ años.

Ejemplo 2

Se ha encontrado un hueso antiguo que contiene $\frac{1}{8}$ de la cantidad original de carbono 14 de un hueso en tiempo actual. ¿Cuál es la antigüedad del fósil? Se sabe que la vida media del carbono 14 es de 5.568 años.

Solución

Sea $x(t)$ la cantidad de carbono 14 existente en el hueso en el instante t y sea x_0 la cantidad de carbono 14 que había en el momento en que se formó el hueso, es decir, $x(0) = x_0$.

Como la vida media del carbono 14 es 5.568 años se tiene $x(5568) = \frac{x_0}{2}$. Además, $\frac{dx}{dt}$ es la rapidez con la que se desintegra el carbono 14 y aplicando

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

sigue que

$$\frac{dx}{x} = -kdt \iff \ln|x| = -kt * C \iff x = e^{-kt+C} = e^{-kt}e^C$$

y como $x(0) = x_0 = e^C$, con lo cual

$$x = x_0 e^{-kt}.$$

Considerando que $x(5568) = \frac{x_0}{2}$ se tiene que

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k5568} \iff \frac{1}{2} = e^{-k5568} \iff -5568k = \ln \frac{1}{2} = -0'693147$$

de donde $k = 0'00012448$, y así

$$x = x_0 e^{-0'00012448t}.$$

Para terminar tenemos que determinar el valor de t para que $x(t) = \frac{x_0}{8}$.

$$\frac{x_0}{8} = x_0 e^{-0'00012448t} \iff \frac{1}{8} = e^{-0'00012448t} \iff -0'00012448t = \ln \frac{1}{8}$$

que nos da $t = 16705$ años.

4.2. Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno, siempre que esta diferencia no es demasiado grande. (Esta ley también se aplica al calentamiento). Si denotamos por $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t y por T_a la temperatura del medio que lo rodea, entonces podemos formular la Ley de Enfriamiento de Newton como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

donde k es una constante que depende de distintos factores.

Ejemplo 1

Una barra metálica que se encuentra a una temperatura de 100°C se pone en una nevera que se mantiene a una temperatura de 0°C . Después de 20 minutos la temperatura de la barra es de 50°C .

- ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que la temperatura de la barra sea de 25°C ?
- ¿Cuál será la temperatura de la barra después de 10 minutos?

Solución

Según los datos del enunciado, si $T(t)$ es la temperatura de la barra en el instante t se tiene: $T(0) = 100^\circ \text{C}$ y $T(20) = 50^\circ \text{C}$. La temperatura ambiente es $T_a = 0^\circ \text{C}$. Según la Ley de Enfriamiento de Newton se tiene

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

y como $T_a = 0^\circ \text{C}$ se tiene ambiente es $T_a = 0^\circ \text{C}$. Según la Ley de Enfriamiento de Newton se tiene

$$\frac{dT}{dt} = kT$$

de lo que sigue

$$\frac{dT}{T} = kdt \iff \ln |T| = kt + C \iff T = e^{kt+C} = e^{kt}e^C = Ae^{kt}$$

denotando por A la constante e^C . Ahora, como $T(0) = 100^\circ \text{C}$ podemos escribir

$$T(t) = 100 e^{kt}$$

como $T(20) = 50^\circ \text{C}$ se tiene

$$50 = 100e^{20k} \iff e^{20k} = \frac{1}{2} \iff 20k = \ln \frac{1}{2} = -0'693147$$

de que sigue que $k = -0'034657$ y así

$$T(t) = 100 e^{-0'034657t}.$$

Ahora podemos abordar las cuestiones planteadas:

a) El tiempo necesario para que la temperatura de la barra sea 25°C se obtiene resolviendo la ecuación $T(t) = 25$, esto es

$$100 e^{-0'034657t} = 25 \iff e^{-0'034657t} = \frac{1}{4} \iff t = \frac{\ln 0'25}{-0'034657} \approx 40$$

b) La temperatura de la barra después de 10 minutos es

$$T(10) = 100 e^{-0'034657 \cdot 10} = 70'71,$$

con lo que podríamos afirmar que al cabo de 10 minutos la temperatura de la barra sería de 71°C aproximadamente.

Ejemplo 2

Un cuerpo cuya temperatura se desconoce es introducido en un frigorífico cuya temperatura se mantiene constante a 1°C . Después de 20 minutos su temperatura es de 40°C y después de 40 minutos su temperatura es de 20°C . Determinar la temperatura inicial del cuerpo y el tiempo que transcurrirá hasta su temperatura sea de 5°C .

Solución

Si $T(t)$ denota la temperatura de este cuerpo en el instante t se tiene: $T(20) = 40^\circ \text{C}$ y $T(40) = 20^\circ \text{C}$. La temperatura ambiente es $T_a = 1^\circ \text{C}$. Según la Ley de Enfriamiento de Newton se tiene

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \iff \frac{dT}{dt} = k(T - 1)$$

Procediendo como en el ejemplo anterior se tiene

$$\frac{dT}{T - 1} = k dt \iff \ln |T - 1| = kt + C \iff T - 1 = e^{kt+C} = e^{kt} e^C = A e^{kt},$$

es decir,

$$T(t) = 1 + A e^{kt}.$$

Ahora para obtener A y k aplicamos que $T(20) = 40$ y $T(40) = 20$, obteniendo

$$\begin{aligned} T(20) &= 1 + A e^{20k} = 40 \\ T(40) &= 1 + A e^{40k} = 20 \end{aligned}$$

de lo que sigue

$$\begin{aligned} A e^{20k} &= 39 \\ A e^{40k} &= 19 \end{aligned}$$

se tiene así un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Dividiendo ordenadamente la primera ecuación entre la segunda se tiene:

$$\frac{e^{20k}}{e^{40k}} = \frac{39}{19} \iff e^{-20k} = \frac{39}{19} \iff -20k = \ln \frac{39}{19} = 0'7191$$

de lo que sigue que $k = -0'03595$.

Por otra parte, para calcular A aplicamos el valor de k y se tiene

$$Ae^{20 \cdot (-0'03595)} = 39 \iff A = \frac{39}{e^{20 \cdot (-0'03595)}} \approx 80$$

y, entonces

$$T(t) = 1 + 80e^{-0'03595t}$$

y, por consiguiente $T(0) = 81^\circ \text{ C}$.

Finalmente, hay que determinar t para que $T(t) = 5^\circ \text{ C}$. Para ello planteamos la ecuación

$$5 = 1 + 80e^{-0'03595t} \iff e^{-0'03595t} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20} = 0'05$$

$$-0'03595t = \ln 0'05 \iff t = \frac{-2'99573}{-0'03595} = 83'33 \approx 83 \text{ horas}$$

4.3. Problemas de mezclas

Los problemas de mezcla surgen en muchos áreas de la ciencia. Por lo general, involucran un tanque de capacidad fija, lleno de una solución bien mezclada de alguna sustancia (como sal). La solución de una concentración dada ingresa al tanque a una velocidad y la mezcla, bien removida, sale a una velocidad fija.

Consideremos un tanque o recipiente que contiene una solución (solute y solvente tales como agua y sal). Supondremos que hay un flujo tanto de entrada como de salida y queremos determinar la cantidad $y(t)$ de soluto que hay en el tanque en el instante t . Suponemos conocidos los siguientes datos:

- volumen inicial l_0
- masa inicial y_0 kg

- concentración inicial $\frac{y_0}{l_0}$ Kg/l
- entra solución a una concentración a Kg/l
- a razón de v_1 l/min
- sale a razón de v_2 l/min

Se pretende calcular $y(t)$, la masa de soluto en el instante t .

La variación de dicha cantidad viene dada por

$$\frac{dy}{dt} = v_e - v_s, \text{ kg/min}$$

donde v_e y v_s son las velocidades de entrada y salida de dicha sustancia respectivamente. Como $v_e = av_1$ Kg/min y $v_s = \frac{y(t)}{V(t)}$ Kg/min donde $V(t) = l_0 + v_1t - v_2t$ es el volumen de disolución en el recipiente en el instante t , el problema de condiciones iniciales se plantea en la forma:

$$\frac{dy}{dt} = (\text{rapidez entrada soluto}) - (\text{rapidez salida soluto})$$

$$\frac{dy}{dt} = av_1 - \frac{y}{l_0 + (v_1 - v_2)t}$$

con $y(0) = y_0$.

Ejemplo 1

Un depósito de 300 litros se encuentra lleno en sus dos terceras partes de capacidad y contiene 50 kilos de sal. En el instante $t = 0$ minutos, se abren las válvulas de manera que se agrega una solución salina con una concentración de un tercio de kilo por litro al contenedor a una velocidad de 3 litros por minuto. Si la mezcla bien agitada se extrae del contenedor a la velocidad de 2 litros por minuto ¿cuántos kilos de sal se encuentran en el contenedor cuando éste se llena?

Solución

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el contenedor en el minuto t . La razón de cambio en cada minuto $y'(t)$, será igual a la cantidad de sal que entra en el depósito, menos la cantidad de sal que sale en el mismo minuto. La velocidad con la que la sal entra en el minuto t será

$$\frac{1}{3} \text{ kg/l} \times 3 \text{ l/min} = 1 \text{ kg/min}$$

Al mismo tiempo la velocidad con que sale la calculamos de la siguiente manera: sabemos que para el minuto t , $y(t)$ será la sal existente en $200 + t$ litros de agua. Por tanto, en 2 litros tendremos $2y(t)/(t + 200)$ kilos de sal. En consecuencia:

$$y'(t) = 1 - \frac{2}{t + 200}y(t), \quad y(0) = 50.$$

se observa que la anterior es una ecuación diferencial lineal:

$$y' + \frac{2}{t + 200}y = 1$$

con $P(t) = \frac{2}{t + 200}$ y $Q(t) = 1$. Ahora calculamos

$$\int \frac{2}{t + 200} dt = 2 \ln(t + 200)$$

y, por tanto,

$$e^{\int P(t)dt} = e^{2 \ln(t+200)} = e^{\ln(t+200)^2} = (t + 200)^2$$

y, multiplicando la ecuación por $(t + 200)^2$ queda

$$(t + 200)^2 y' + 2(t + 200)y = (t + 200)^2$$

de donde

$$\left((t + 200)^2 y \right)' = (t + 200)^2$$

y entonces

$$(t + 200)^2 y = \int (t + 200)^2 dt = \frac{(t + 200)^3}{3} + C$$

de lo que sigue

$$y = \frac{t + 200}{3} + \frac{C}{(t + 200)^2}.$$

Ésta es la solución general de la ecuación lineal. Para encontrar la solución particular que verifica $y(0) = 50$ sustituimos

$$50 = \frac{200}{3} + \frac{C}{200^2} \implies C = \frac{-50}{3} 200^2$$

y la solución pedida es

$$y = \frac{t + 200}{3} - \frac{50 \cdot 200^2}{3(t + 200)^2}$$

Por último, para conocer la cantidad de sal existente en el depósito cuando éste se ha llenado es necesario saber el tiempo transcurrido. Como cada minuto aumenta en un litro la cantidad de agua e inicialmente teníamos 200 litros serán necesarios 100 minutos para llenar el contenedor. En este caso resulta

$$y(100) \approx 92 \text{ kg}$$

Ejemplo 2

Una solución salina fluye a razón constante de 6 l/min hacia el interior de un depósito que, inicialmente, contiene 50 litros de solución salina en la cual se disolvieron 5 kg de sal. La solución contenida en el depósito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal que entra es de 0'5 kg/l, determinar la cantidad de sal presente en el depósito al cabo de t minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el depósito el valor de 0'3 kg/l?

Solución

Comenzamos denotando por $y(t)$ los kg de sal dentro del depósito en el instante t .

Igual que en el ejemplo anterior se tiene que:

$$y'(t) = 6 \cdot 0'5 - 6 \cdot \frac{y}{50}, \quad y(0) = 5$$

Obsérvese que, en este caso se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = 3 - \frac{3y}{25} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{75 - 3y}{25} \Rightarrow \frac{dy}{75 - 3y} = \frac{dt}{25}$$

de lo que sigue

$$-\ln|75 - 3y| = \frac{t}{25} + C \Rightarrow 75 - 3y = e^{-3t/25+C} = e^{-3t/25} 25e^C = Ae^{-3t/25}$$

de donde

$$y = 25 - \frac{A}{3}e^{-3t/25}$$

$$y(0) = 5 \iff 5 = 25 - \frac{A}{3} \iff A = 60 \implies y = 25 - 20e^{-3t/25}.$$

Por consiguiente, la concentración será

$$C(t) = \frac{y(t)}{50} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}e^{-3t/25}$$

y, finalmente, para calcular el tiempo que tiene que transcurrir para que la concentración sea 0'3 kg/ se pone

$$0'3 = 0'5 - 0'4e^{-3t/25} \Rightarrow 0'5 = e^{-3t/25} \Rightarrow t = \frac{25 \ln 2}{3} \approx 6 \text{ minutos.}$$